

Capitolo 7

Sistemi nonlineari di equazioni

I fenomeni reali raramente sono lineari per cui i modelli lineari, che finora abbiamo considerato, sono spesso solo delle approssimazioni di modelli più generali. In questo capitolo vedremo, in forma molto semplificata, alcuni punti essenziali riguardanti lo studio dei problemi nonlineari.

7.1 Il caso discreto

Sia assegnato il problema discreto nonlineare del primo ordine

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{f}(n, \mathbf{y}_n), \quad n \geq n_0, \quad \mathbf{y}_{n_0} \in \mathbb{R}^m \text{ assegnato.} \quad (7.1)$$

Un vettore $\bar{\mathbf{y}}$ è detto *punto di equilibrio* o *punto critico* se

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(n, \bar{\mathbf{y}}), \quad n \geq n_0.$$

Senza perdere in generalità, assumeremo che

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0}.$$

Infatti, se così non fosse, ponendo $\mathbf{z}_n = \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}$, si otterrebbe

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{f}(n, \mathbf{z}_n + \bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(n, \bar{\mathbf{y}}) \equiv \mathbf{g}(n, \mathbf{z}_n),$$

che avrebbe il punto di equilibrio nell'origine.

Ciò premesso, andiamo a dare le seguenti definizioni di stabilità che generalizzano quelle viste nel caso lineare.

Definizione 7.1 *La soluzione nulla di (7.1) si dirà:*

- stabile, se $\forall \varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ tale che $\|\mathbf{y}_{n_0}\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{y}_n\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$;
- uniformemente stabile, se è stabile e, inoltre, $\delta = \delta(\varepsilon)$;
- asintoticamente stabile, se è stabile e, inoltre, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{0}$;
- uniformemente asintoticamente stabile, se è uniformemente stabile ed asintoticamente stabile;

- esponenzialmente asintoticamente stabile, se

$$\exists a > 0 \text{ e } \eta \in (0, 1) \text{ tali che } \|\mathbf{y}_n\| < a\|\mathbf{y}_{n_0}\|\eta^{n-n_0}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Osservazione 7.1 Osserviamo che la esponenziale asintotica stabilità implica la uniforme asintotica stabilità ma la velocità con cui le soluzioni tendono a 0 è di tipo esponenziale. Ad esempio, l'equazione

$$y_{n+1} = \frac{|y_n|}{|y_n| + 1}, \quad n \geq n_0,$$

ha l'origine come punto di equilibrio uniformemente asintoticamente stabile ma non esponenzialmente asintoticamente stabile. Infatti,

$$y_n \simeq (n - n_0 + 1)^{-1}, \quad n \geq n_0.$$

Il caso lineare

Nel caso in cui il problema sia lineare (ma, in genere, non autonomo),

$$\mathbf{y}_{n+1} = A_n \mathbf{y}_n, \quad (7.2)$$

le precedenti definizioni impongono delle condizioni sulla matrice fondamentale Φ_{n,n_0} che, ricordiamo, è soluzione del problema

$$\Phi_{n+1,n_0} = A_n \Phi_{n,n_0}, \quad n \geq n_0, \quad \Phi_{n_0,n_0} = I.$$

Valgono, infatti, i seguenti risultati.

Teorema 7.1 La soluzione nulla di (7.2) è uniformemente stabile se e solo se esiste $M > 0$ tale che:

$$\|\Phi_{n,n_0}\| \leq M, \quad \forall n \geq n_0. \quad (7.3)$$

Dimostrazione. Supponiamo che valga la (7.3). Segue quindi che

$$\|\mathbf{y}_n\| = \|\Phi_{n,n_0} \mathbf{y}_{n_0}\| \leq \|\Phi_{n,n_0}\| \cdot \|\mathbf{y}_{n_0}\| \leq M \|\mathbf{y}_{n_0}\|.$$

Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, ponendo $\delta = \delta(\varepsilon) = M^{-1}\varepsilon$, si ha che

$$\|\mathbf{y}_{n_0}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{y}_n\| < \varepsilon$$

e, pertanto, la soluzione nulla è uniformemente stabile. Viceversa, supponiamo che la soluzione nulla sia uniformemente asintoticamente stabile, allora $\forall n \geq n_0$

$$\sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\Phi_{n,n_0} \mathbf{x}\| \equiv \|\Phi_{n,n_0}\|$$

è limitato, ovvero vale la (7.3). \square

Per la uniforme asintotica stabilità, vale il seguente risultato che non dimostriamo (una implicazione era già stata osservata in precedenza).

Teorema 7.2 La soluzione nulla di (7.2) è uniformemente asintoticamente stabile se e solo se $\exists a > 0$ e $\eta \in (0, 1)$ tali che:

$$\|\Phi_{n,n_0}\| < a\eta^{n-n_0}, \quad n \geq n_0. \quad (7.4)$$

Corollario 7.1 *La soluzione nulla di (7.18) è uniformemente asintoticamente stabile se e solo se essa è esponenzialmente asintoticamente stabile.¹*

Osservazione 7.2 *Quindi nel caso lineare generale, le proprietà di stabilità della soluzione di equilibrio dipendono dalle proprietà della matrice fondamentale e, pertanto, indipendenti dalla soluzione di equilibrio stessa.*

Processo di linearizzazione

Consideriamo ora sistemi nonlineari del tipo

$$\mathbf{y}_{n+1} = A_n \mathbf{y}_n + \mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n), \quad n \geq n_0, \quad \mathbf{y}_{n_0} \in \mathbb{R}^m \text{ dato}, \quad (7.5)$$

in cui $\mathbf{g}(n, \mathbf{y})$ è in genere nonlineare e soddisfa

$$\mathbf{g}(n, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \forall n \geq n_0. \quad (7.6)$$

In questo caso, evidentemente, l'origine è ancora un processo critico. Riguardando il termine nonlineare in (7.5) formalmente come un termine noto \mathbf{b}_n , si ottiene, in virtù della (6.18),

$$\mathbf{y}_n = \Phi_{n, n_0} \mathbf{y}_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi_{n, i+1} \mathbf{g}(i, \mathbf{y}_i), \quad n \geq n_0. \quad (7.7)$$

Da questo si intuisce come, sotto opportune ipotesi, le proprietà di stabilità del punto critico dipendano dalle proprietà di stabilità derivanti dalla parte lineare di (7.5), formalmente data da (7.2). In questo modo, è possibile discutere le proprietà di stabilità del punto critico di (7.1) dove, supponendo che $\mathbf{f}(n, \mathbf{y})$ sia abbastanza regolare rispetto a \mathbf{y} , si ottiene, mediante lineizzazione, che

$$\mathbf{y}_{n+1} = \underbrace{\mathbf{f}(n, \mathbf{0})}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{J_{\mathbf{f}}(n, \mathbf{0})}_{\equiv A_n} \mathbf{y}_n + \mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n) = A_n \mathbf{y}_n + \mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n), \quad (7.8)$$

dove abbiamo denotato con $J_{\mathbf{f}}$ la matrice Jacobiana di \mathbf{f} rispetto a \mathbf{y} e, inoltre, supponendo che \mathbf{g} sia sufficientemente regolare,

$$\|\mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n)\| = O(\|\mathbf{y}_n\|^2). \quad (7.9)$$

Osservazione 7.3 *L'equazione linearizzata nel punto di equilibrio, definisce il cosiddetto problema variazionale. In generale, quest'ultimo può essere definito rispetto ad una qualunque soluzione di riferimento.*

Vale il seguente risultato.

Teorema 7.3 *Siano dati il problema (7.8) ed il problema associato (7.2). Se:*

- $\|\mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n)\| \leq L\|\mathbf{y}_n\|$, con L sufficientemente "piccolo",
- *la soluzione nulla di (7.2) è uniformemente asintoticamente stabile,*

allora la soluzione nulla di (7.8) è uniformemente asintoticamente stabile.

¹ Ovvero, nel caso lineare, uniforme asintotica stabilità ed esponenziale asintotica stabilità di un punto critico sono proprietà equivalenti.

Dimostrazione. Essendo l'origine uniformemente asintoticamente stabile per la (7.2) esistono, in virtù del Teorema 7.2 $a > 0$ e $\eta \in (0, 1)$ tali che la matrice fondamentale del problema soddisfa (7.4). Pertanto, dalla (7.7) segue che:

$$\|\mathbf{y}_n\| < a\eta^{n-n_0} + aL \sum_{i=n_0}^{n-1} \eta^{n-i-1} \|\mathbf{y}_i\|, \quad n \geq n_0.$$

Moltiplicando membro a membro per η^{-n} , e ponendo $p_n = \eta^{-n} \|\mathbf{y}_n\|$, si ottiene

$$p_n < ap_{n_0} + aL\eta^{-1} \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i, \quad n \geq n_0.$$

Dal Corollario 2.4 (vedi (2.29)) segue quindi che:

$$p_n < ap_{n_0} \prod_{i=n_0}^{n-1} (1 + aL\eta^{-1}) = ap_{n_0} (1 + aL\eta^{-1})^{n-n_0}, \quad n \geq n_0.$$

Moltiplicando per η^n , si ottiene, quindi:

$$\|\mathbf{y}_n\| < a\|\mathbf{y}_{n_0}\|(\eta + aL)^{n-n_0}, \quad n \geq n_0.$$

Si vede quindi che, se L è sufficientemente "piccolo" da aversi:

$$\eta + aL < 1,$$

allora la soluzione è uniformemente asintoticamente stabile. \square

Corollario 7.2 *Se la soluzione nulla di (7.2) è uniformemente asintoticamente stabile, allora la stessa è uniformemente asintoticamente stabile per (7.8) in un suo intorno sufficientemente piccolo.*

Dimostrazione. Infatti, dalla (7.9), segue che, per $\|\mathbf{y}\|$ sufficientemente piccolo,

$$\|\mathbf{g}(n, \mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{y}\|,$$

con $L = O(\|\mathbf{y}\|)$ arbitrariamente piccolo e, pertanto, vale il risultato del precedente Teorema 7.3. \square

Il corollario successivo, particolarmente importante per le applicazioni, riguarda il sistema

$$\mathbf{y}_{n+1} = A\mathbf{y}_n + \mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n), \quad \mathbf{g}(n, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad n \geq n_0. \quad (7.10)$$

Corollario 7.3 (Teorema di Perron, versione discreta) *Dato il sistema di equazioni (7.10), se $\rho(A) < 1$ e, inoltre,*

$$\lim_{\|\mathbf{y}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{g}(n, \mathbf{y})\|}{\|\mathbf{y}\|} = 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad (7.11)$$

allora la sua soluzione nulla è uniformemente asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Essendo $\rho(A) < 1$, la soluzione nulla è (uniformemente) asintoticamente stabile per il sistema

$$\mathbf{y}_{n+1} = A\mathbf{y}_n, \quad n \geq n_0.$$

Inoltre, la (7.11), che è una proprietà più debole (ma ai nostri fini equivalente) della (7.9), garantisce il soddisfacimento della prima ipotesi del Teorema 7.3 che, pertanto, garantisce la uniforme asintotica stabilità della soluzione nulla per (7.10), in un suo intorno sufficientemente piccolo. \square

Questo risultato, insieme al suo corrispettivo continuo che esamineremo successivamente, è di fondamentale importanza nelle applicazioni. Infatti esso giustifica l'uso della parte lineare di equazioni più complesse in luogo di queste ultime. Esso, inoltre, è di utilità anche nella modellistica dei fenomeni (come vedremo). Di seguito, riportiamo alcuni esempi che riguardano specificatamente l'Analisi Numerica.

Convergenza dei metodi iterativi per la ricerca degli zeri di funzioni

La ricerca di zeri di sistemi di equazioni nonlineari,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

è effettuata per mezzo di metodi iterativi, della forma

$$\mathbf{x}_{n+1} = \phi(\mathbf{x}_n), \quad n \geq 0, \quad (7.12)$$

dove ϕ è la *funzione di iterazione* del metodo. Ad esempio, per il metodo di Newton si ha:

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

dove $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ è la matrice Jacobiana di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. In questo caso, la soluzione del problema, sia essa $\bar{\mathbf{x}}$, tale che $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, diviene un punto fisso (ovvero un punto di equilibrio) per la funzione di iterazione:

$$\bar{\mathbf{x}} = \phi(\bar{\mathbf{x}}).$$

Il metodo (7.12) sarà convergente alla soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ se l'errore converge al vettore nullo:

$$\mathbf{e}_n \equiv \mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{0}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Sviluppando la ϕ in serie di Taylor (che, ovviamente, supponiamo essere definita) in $\bar{\mathbf{x}}$, dalla (7.12) si ottiene:

$$\mathbf{e}_{n+1} = J_{\phi}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{e}_n + \mathbf{g}(\mathbf{e}_n), \quad n \geq 0,$$

dove

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{e}_n)\| = O(\|\mathbf{e}_n\|^2).$$

Ponendo $A = J_{\phi}(\bar{\mathbf{x}})$, si ottiene

$$\mathbf{e}_{n+1} = A\mathbf{e}_n + \mathbf{g}(\mathbf{e}_n), \quad n \geq 0, \quad (7.13)$$

che è nella forma (7.10). Dal Teorema di Perron, segue quindi che se $\rho(A) < 1$, allora il procedimento risulterà convergente in un opportuno intorno della soluzione stessa.

Uso dell'equazione test

Il Teorema di Perron, permette di dare una giustificazione rigorosa per l'analisi di stabilità lineare dei metodi numerici per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie. Infatti, sia dato il problema (che supponiamo scalare, per semplicità e brevità di trattazione)

$$y' = f(y), \quad f(0) = 0, \quad (7.14)$$

avente un punto di equilibrio asintoticamente stabile nell'origine. Utilizzando un metodo (ρ, σ) per la sua risoluzione approssimata con passo h , si otterrà l'equazione alle differenze

$$\rho(E)y_n - h\sigma(E)f(y_n) = 0, \quad n \geq 0.$$

Ponendo $\lambda = f'(0)$, si ottiene

$$\rho(E)y_n - q\sigma(E)y_n - h\sigma(E)g(y_n) = 0, \quad n \geq 0, \quad (7.15)$$

dove

$$q = h\lambda \quad \text{e} \quad g(y_n) = O(y_n^2).$$

Se

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^k \alpha_i z^i, \quad \sigma(z) = \sum_{i=0}^k \beta_i z^i,$$

questa equazione alle differenze di ordine k può essere trasformata in un sistema lineare del primo ordine di dimensione k . Infatti, definendo i vettori

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+k-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{h}{\alpha_k - q\beta_k} \sigma(E)g(y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

e la matrice (in forma di Frobenius)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0 - q\beta_0}{\alpha_k - q\beta_k} & \dots & \dots & \dots & -\frac{\alpha_{k-1} - q\beta_{k-1}}{\alpha_k - q\beta_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k},$$

la (7.15) può essere riscritta come

$$\mathbf{y}_{n+1} = A\mathbf{y}_n + \mathbf{g}_n$$

che è nella forma richiesta dal Teorema di Perron e, pertanto, se $\rho(A) < 1$, allora la soluzione discreta sarà asintoticamente stabile in un opportuno intorno dell'origine. Essendo la matrice in forma di Frobenius, si ricava che, a meno del fattore moltiplicativo $(\alpha_k - q\beta_k)^{-1}$, il suo polinomio caratteristico è

$$\pi(z, q) = \rho(z) - q\sigma(z)$$

e, pertanto,

$$\rho(A) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad q \in \mathcal{D},$$

essendo \mathcal{D} la regione di assoluta stabilità del metodo (ρ, σ) .

Influenza degli errori di macchina

L'ipotesi (7.11) del Teorema di Perron, che vale in aritmetica *esatta*, è quasi sempre non verificata quando si utilizza l'aritmetica *finita* di un calcolatore. In questo caso, la (7.11) è più realisticamente sostituita da una diseguaglianza del tipo

$$\|\mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n)\| \leq \delta,$$

dove δ è "piccolo" ma finito.² In questo caso, se consideriamo ad esempio la (7.13), si ottiene (supponendo, per semplicità, che $\|A\| < 1$)³:

$$\|\mathbf{e}_{n+1}\| \leq \|A\| \|\mathbf{e}_n\| + \delta, \quad n \geq 0.$$

Da questa, considerando l'equazione del confronto, si ricava facilmente che

$$\|\mathbf{e}_n\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|A\|^i \delta = \frac{1 - \|A\|^n}{1 - \|A\|} \delta < \frac{1}{1 - \|A\|} \delta, \quad n \geq 0.$$

Se ne deduce che l'errore dell'equazione perturbata rimane limitato, sebbene si perda la asintotica stabilità dell'origine (che, anzi, potrebbe non essere più un punto critico dell'equazione perturbata). In questo caso, in cui le perturbazioni non sono infinitesime con l'errore, ma *persistenti*, si parla di *problema di stabilità totale*. In maggior dettaglio, in questo caso la soluzione nulla dell'equazione

$$\mathbf{e}_{n+1} = A\mathbf{e}_n, \quad n \geq n_0$$

si dirà *totalmente stabile*. Più in generale, si può dimostrare che, nel caso di una equazione più generale, la Lipchitzianità del suo secondo membro rispetto al vettore di stato, unito all'uniforme asintotica stabilità del punto critico, ne implicano la stabilità totale.

7.2 Il caso continuo

Argomenti del tutto analoghi possono essere ripetuti nel caso di sistemi nonlineari di equazioni,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \quad (7.16)$$

in cui, al solito senza perdere in generalità, si suppone che

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (7.17)$$

Ovvero, $\mathbf{0}$ è un *punto di equilibrio*, o *punto critico*, per (7.16). Le seguenti definizioni, costituiscono la controparte continua di quanto visto nella precedente sezione.

Definizione 7.2 *La soluzione nulla di (7.16)-(7.17) si dirà:*

- stabile, se $\forall \varepsilon > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tale che $\|\mathbf{y}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{y}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$;
- uniformemente stabile, se è stabile e, inoltre, $\delta = \delta(\varepsilon)$;
- asintoticamente stabile, se è stabile e, inoltre, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$;

²Ad esempio, potrebbe aversi $\delta \simeq \varepsilon$, la *precisione di macchina* dell'aritmetica utilizzata.

³In realtà, tra tutte le norme indotte su matrice, ce n'è sempre una per cui $\rho(A) = \|A\|$.

- uniformemente asintoticamente stabile, se è uniformemente stabile ed asintoticamente stabile;
- esponenzialmente asintoticamente stabile, se

$$\exists \alpha, \beta > 0 \text{ tali che } \|y(t)\| < \alpha \|y_0\| e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Osservazione 7.4 Analogamente al caso discreto, anche ora osserviamo che la esponenziale asintotica stabilità implica la uniforme asintotica stabilità ma la velocità con cui le soluzioni tendono a 0 è di tipo esponenziale. Ad esempio, l'equazione

$$y' = \frac{-1}{y^2}, \quad t \geq t_0,$$

ha l'origine come punto di equilibrio uniformemente asintoticamente stabile ma non esponenzialmente asintoticamente stabile. Infatti,

$$y(t) \simeq (t - t_0 + 1)^{-1}, \quad t \geq t_0.$$

Il caso lineare

Nel caso in cui il problema sia lineare (ma, in genere, non autonomo),

$$y'(t) = A(t)y(t), \quad (7.18)$$

le precedenti definizioni impongono delle condizioni sulla matrice fondamentale $\Phi(t, t_0)$ che, ricordiamo, è soluzione del problema

$$\Phi'(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad t \geq t_0, \quad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

Analogamente al caso discreto, valgono, infatti, i seguenti risultati.

Teorema 7.4 La soluzione nulla di (7.18) è uniformemente stabile se e solo se esiste $M > 0$ tale che:

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M, \quad \forall t \geq t_0.$$

Teorema 7.5 La soluzione nulla di (7.18) è uniformemente asintoticamente stabile se e solo se $\exists \alpha, \beta > 0$ tali che:

$$\|\Phi(t, t_0)\| < \alpha e^{-\beta(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Corollario 7.4 La soluzione nulla di (7.18) è uniformemente asintoticamente stabile se e solo se essa è esponenzialmente asintoticamente stabile.⁴

Osservazione 7.5 Quindi nel caso lineare generale, le proprietà di stabilità della soluzione di equilibrio dipendono dalle proprietà della matrice fondamentale e, pertanto, indipendenti dalla soluzione di equilibrio stessa.

⁴Ovvero, anche nel caso continuo, nel caso lineare uniforme asintotica stabilità ed esponenziale asintotica stabilità di un punto critico sono proprietà equivalenti.

Processo di linearizzazione

Analogamente a quanto visto nel caso discreto, consideriamo ora sistemi nonlineari del tipo

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t)), \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \quad (7.19)$$

in cui $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ è in genere nonlineare e soddisfa

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (7.20)$$

In questo caso, evidentemente, l'origine è ancora un processo critico. Riguardando il termine nonlineare in (7.19) formalmente come un termine noto $\mathbf{b}(t)$, si ottiene, in virtù della (6.8),

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{g}(\tau, \mathbf{y}(s))ds, \quad t \geq t_0. \quad (7.21)$$

Analogamente al caso discreto, da questo si intuisce come, sotto opportune ipotesi, le proprietà di stabilità del punto critico dipendano dalle proprietà di stabilità derivanti dalla parte lineare di (7.19), formalmente data da (7.18). In questo modo, è possibile discutere le proprietà di stabilità del punto critico di (7.16) dove, supponendo che $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sia abbastanza regolare rispetto a \mathbf{y} , si ottiene, mediante linearizzazione, che

$$\mathbf{y}'(t) = \underbrace{\mathbf{f}(t, \mathbf{0})}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{J_{\mathbf{f}}(t, \mathbf{0})}_{\equiv A(t)}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t)) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t)), \quad (7.22)$$

dove abbiamo denotato con $J_{\mathbf{f}}$ la matrice Jacobiana di \mathbf{f} rispetto a \mathbf{y} e, inoltre, supponendo che \mathbf{g} sia sufficientemente regolare,

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t))\| = O(\|\mathbf{y}(t)\|^2).$$

Osservazione 7.6 *Come nel caso discreto, l'equazione linearizzata nel punto di equilibrio, definisce il cosiddetto problema variazionale. In generale, quest'ultimo può essere definito rispetto ad una qualunque soluzione di riferimento.*

Vale il seguente risultato, che si dimostra analogamente al caso discreto.

Teorema 7.6 *Siano dati il problema (7.22) ed il problema associato (7.18). Se:*

- $\|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t))\| \leq L\|\mathbf{y}(t)\|$, con L sufficientemente "piccolo",
- la soluzione nulla di (7.18) è uniformemente asintoticamente stabile,

allora la soluzione nulla di (7.22) è uniformemente asintoticamente stabile.

Inoltre, come nel caso continuo, si dimostra il seguente risultato.

Corollario 7.5 *Se la soluzione nulla di (7.18) è uniformemente asintoticamente stabile, allora la stessa è uniformemente asintoticamente stabile per (7.22) in un suo intorno sufficientemente piccolo.*

Il corollario successivo, riguarda il sistema

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{g}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad t \geq t_0, \quad (7.23)$$

e si dimostra in modo analogo al caso discreto.

Corollario 7.6 (Teorema di Perron, versione continua) *Dato il sistema di equazioni (7.23), se $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ e, inoltre,*

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(t, y)\|}{\|y\|} = 0, \quad \forall t \geq t_0,$$

allora la sua soluzione nulla è uniformemente asintoticamente stabile.

Giustificazione dell'equazione test

Consideriamo ancora una volta l'equazione (7.14), avente l'origine come punto critico. Si ottiene, ponendo $\lambda = f'(0)$ e supponendo f sufficientemente regolare:

$$y' = \lambda y + g(y), \quad \text{con} \quad g(y) = O(y^2).$$

Pertanto, se l'origine è asintoticamente stabile per la parte lineare (cioè, se $\Re(\lambda) < 0$), allora essa sarà uniformemente asintoticamente stabile per (7.14). Pertanto, il Teorema di Perron giustifica l'utilizzo dell'equazione test

$$y' = \lambda y, \quad \Re(\lambda) < 0,$$

nell'intorno di un punto di equilibrio uniformemente asintoticamente stabile.

Modello per la diagnosi del diabete mellito

Il diabete mellito è una patologia che si manifesta con una elevata concentrazione del glucosio nel sangue e nelle urine.⁵ La funzione del glucosio è quella di portare energia alle cellule. Esso è presente nel sangue con una concentrazione ottimale che indicheremo con \bar{G} . Tale concentrazione aumenta in seguito alla ingestione di cibo, o può diminuire in seguito ad un aumentato bisogno dell'organismo. A regolare il meccanismo di aumento o diminuzione della concentrazione del glucosio nel sangue vi sono diversi ormoni:

Insulina. È secreta dalle cellule β del pancreas. Esso favorisce l'assorbimento del glucosio da parte delle cellule e di conseguenza la diminuzione della sua concentrazione.

Glucagone. È secreto dalle cellule α del pancreas. Un eccesso di glucosio nel sangue viene trasformato in glicogeno ed immagazzinato nel fegato. In caso di ipoglicemia, cioè bassa concentrazione di glucosio, il glucagone favorisce la trasformazione di glicogeno in glucosio e quindi favorisce l'aumento di concentrazione di quest'ultima sostanza.

Adrenalina. È prodotto dalle capsule surrenali e fa aumentare la concentrazione del glucosio nel sangue attivando un processo più rapido e più completo rispetto al glucagone. Questo processo si attiva in casi di elevata ipoglicemia.

Il modello che descriviamo considera solo l'interazione glucosio-insulina. Sebbene modelli più completi siano stati formulati, nondimeno questo è assai utilizzato nella pratica clinica. Siano dunque $G(t)$ ed $H(t)$ le concentrazioni del glucosio e dell'insulina nel sangue e \bar{G} , \bar{H} le concentrazioni ottimali. Il modello è il seguente.

$$\begin{aligned} G' &= F_1(G, H), \\ H' &= F_2(G, H). \end{aligned}$$

⁵Esiste anche una forma senile di diabete, dovuta a deficit metabolici dovuti all'età.

Se la concentrazione delle due sostanze nel sangue è ai livelli ottimali, il meccanismo di regolazione non viene attivato, cioè si avrà:

$$\begin{aligned} F_1(\bar{G}, \bar{H}) &= 0, \\ F_2(\bar{G}, \bar{H}) &= 0, \end{aligned}$$

Questo significa che (\bar{G}, \bar{H}) è un punto di equilibrio per il sistema. Il meccanismo di regolazione sarà funzionante se una perturbazione nell'intorno di questo punto, tenderà ad essere smorzata fino a ritornare al punto di equilibrio. Il punto di equilibrio deve dunque risultare essere asintoticamente stabile.⁶

Supporremo che le funzioni F_1 ed F_2 siano sviluppabili in serie di Taylor almeno fino al secondo termine. Introducendo le variabili

$$g(t) = G(t) - \bar{G}, \quad \text{e} \quad h(t) = H(t) - \bar{H},$$

il modello può scriversi nella forma

$$\begin{aligned} g' &= -m_1g - m_2h + \gamma_1(g, h), \\ h' &= m_3g - m_4h + \gamma_2(g, h), \end{aligned}$$

dove le funzioni $\gamma_1(g, h)$, $\gamma_2(g, h)$ rappresentano i termini di ordine superiore nello sviluppo in serie e $m_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$. La parte lineare del modello è stata evidenziata in maniera che i segni dei coefficienti appaiano chiaramente indicati. Convincersi che i segni siano quelli indicati è abbastanza semplice. Infatti se, per esempio, al tempo $t = t_0$ si parte da una situazione in cui vi sia eccesso di glucosio ($g > 0$) ed $h = 0$, il meccanismo di autoregolazione sarà attivato e si avrà, a meno di termini infinitesimi di ordine superiore,

$$g'(t_0) \simeq \frac{\partial F_1}{\partial g}(0, 0) \equiv -m_1 < 0$$

e, inoltre,

$$h'(t_0) \simeq \frac{\partial F_2}{\partial g}(0, 0) \equiv m_3 > 0.$$

Il meccanismo farà, cioè, diminuire il glucosio e aumentare l'insulina. Similmente, se per $t = t_0$ si avesse $g = 0$ e $h > 0$, entrambe le derivate saranno negative. È facile verificare che gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -m_1 & -m_2 \\ m_3 & -m_4 \end{pmatrix}$$

sono a parte reale negativa e quindi, per la parte lineare del sistema, l'origine è asintoticamente stabile. Dunque, per il Teorema di Perron, l'origine è asintoticamente stabile per il sistema completo.

Questo modello può essere utilizzato per la diagnosi del diabete mellito. Infatti, se il ritorno al livello di equilibrio è troppo lento, questo si configura come una condizione patologica. Il test per rilevare la correttezza del meccanismo di autoregolamentazione, si basa sulla verifica della concentrazione del solo glucosio (la cui misura si fa facilmente ed è poco dispendiosa).⁷ Per questo motivo, ricercheremo un'espressione matematica che contenga solo

⁶Diversamente, si andrebbe in coma per iperglicemia.

⁷Esistono addirittura misuratori portatili della glicemia, che utilizzano una goccia di sangue prelevata da un dito.

la variabile G . Derivando la prima delle due equazioni rispetto al tempo, e tenendo conto della seconda, si ha, infatti⁸

$$g'' = -m_1 g' - m_2(m_3 g - m_4 h).$$

Ricavando h dalla prima e sostituendo, si ha

$$g'' + (m_1 + m_4)g' + (m_1 m_4 + m_2 m_3)g = 0.$$

Posti

$$\beta^2 = m_1 m_4 + m_2 m_3, \quad 2\alpha = m_1 + m_4,$$

si ottiene

$$g'' + 2\alpha g' + \beta^2 g = 0.$$

La soluzione, ponendo $t_0 = 0$, è

$$g(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \phi), \quad \text{dove} \quad \omega^2 = \beta^2 - \alpha^2,$$

(ω risulta essere reale). Tornando alla vecchia variabile, si ha

$$G(t) = \bar{G} + Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \phi).$$

Le quantità α , A , ω , ϕ devono essere determinate in base ai risultati dei test. Poiché la prima misura della glicemia si esegue dopo una nottata di digiuno, si assume che essa fornisca il valore di equilibrio \bar{G} . Successivamente, viene fatta assumere al paziente una certa quantità di glucosio (dell'acqua zuccherata, con una quantità di zucchero dipendente dal peso corporeo) e si eseguono m misurazioni G_i , della glicemia ad istanti prefissati t_i , $i = 1, \dots, m$. I parametri incogniti si possono quindi ricavare con il metodo dei minimi quadrati. Si definisce cioè la funzione

$$F(\alpha, \omega, A, \phi) = \sum_{i=1}^m (G_i - \bar{G} - Ae^{-\alpha t_i} \cos(\omega t_i + \phi))^2$$

e se ne cerca il minimo rispetto alle sue variabili. In particolare ω è il parametro meno sensibile agli errori sperimentali. Il diabete è diagnosticato quando

$$T = \frac{2\pi}{\omega} > 3.5 \quad \text{ore.}$$

A titolo di esempio, due curve da carico sono raffigurate in Figura 7.1. Sull'asse orizzontale, il tempo è misurato in *ore*, mentre su quello verticale la glicemia è misurata in *mg/dl*. La curva inferiore è normale e, come si può vedere, il ritorno all'equilibrio è in circa 3 ore. In quella superiore, a parte il valore molto alto della glicemia iniziale, il ritorno all'equilibrio si ottiene dopo ben 6 ore.

Il caso di stabilità marginale

Il Teorema di Perron, nella sua versioni continue e discrete, permettono di studiare la stabilità del punto di equilibrio nel caso in cui tale punto di equilibrio sia asintoticamente stabile per il sistema linearizzato. Nel caso in cui per quest'ultimo il punto di equilibrio sia solo stabile,

⁸Al solito, si considera la sola parte lineare del modello.

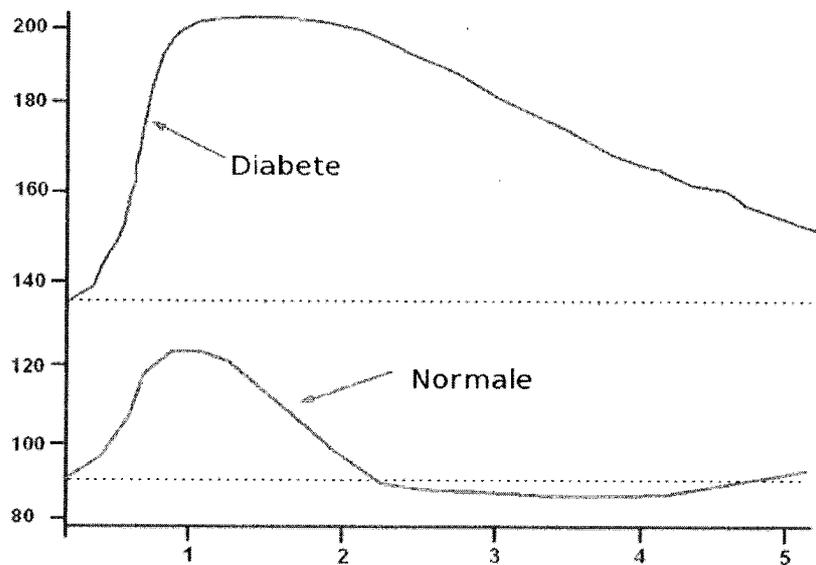


Figura 7.1: Esempi di curva da carico normale (in basso) e con diabete mellito (in alto).

nulla si può dire sul comportamento del sistema completo, come dimostrato dal seguente esempio. Sia, per $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}x' &= -y + \alpha x \sqrt{x^2 + y^2} \\y' &= x + \alpha y \sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

La parte lineare,

$$x' = -y, \quad y' = x,$$

è marginalmente stabile, poiché gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

sono $\pm i$. Se consideriamo il problema completo, tuttavia, passando in coordinate polari,

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta \theta' &= -\rho \sin \theta + \alpha \rho^2 \cos \theta, \\ \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta \theta' &= \rho \cos \theta + \alpha \rho^2 \sin \theta.\end{aligned}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\cos \theta$, la seconda per $\sin \theta$ e sommando, si ottiene:

$$\rho' = \alpha \rho^2. \tag{7.24}$$

Similmente, moltiplicando la prima equazione per $-\sin \theta$, la seconda per $\cos \theta$ e sommando, si ottiene:

$$\theta' = 1.$$

La soluzione di quest'ultima equazione, assumenti $\theta(0) = \theta_0$, è

$$\theta(t) = \theta_0 + t, \quad t \geq 0.$$

Pertanto, le traiettorie si avvolgeranno attorno all'origine in senso antiorario. Assumendo, per la (7.24) la condizione iniziale $\rho(0) = \rho_0 > 0$, la soluzione si verifica essere data da

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{1 - \alpha\rho_0 t}, \quad t \geq 0.$$

Pertanto, se $\alpha < 0$ si ottiene un fuoco stabile mentre, nel caso $\alpha > 0$, per $t \rightarrow (\alpha\rho)^{-1}$ la traiettoria diviene illimitata. Poiché la parte lineare non dipende dal parametro α , si comprende come le sue proprietà non diano informazione nel caso di stabilità marginale.

7.3 Funzioni di Lyapunov

Abbiamo già evidenziato che lo studio del comportamento qualitativo delle soluzioni di un sistema nonlineare nell'intorno di un punto di equilibrio mediante l'analisi della parte lineare non è sempre possibile. Anche la tecnica che stiamo per descrivere non è applicabile in tutti i casi. Tuttavia, ove utilizzabile, essa risulta essere molto semplice e potente. Essa fu proposta da Lyapunov verso la fine del diciannovesimo secolo. Si consideri, per semplicità, un problema autonomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \quad (7.25)$$

che supponiamo ammetta un'unica soluzione per $t \geq 0$. Supporremo, al solito, che l'origine sia l'unico punto critico per (7.25):

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Supponiamo, ora, che esista una funzione differenziabile e con derivate continue $V : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}) &\geq 0, \\ V(\mathbf{y}) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}, \\ V(\mathbf{y}) &\rightarrow \infty \quad \text{per} \quad \mathbf{y} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Vale allora il seguente risultato, che è una versione semplificata del risultato originale di Lyapunov.

Teorema 7.7 (Teorema di Lyapunov) *Se, per ogni \mathbf{y} in un intorno dell'origine vale:*

$$\nabla V(\mathbf{y})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}) \leq 0, \quad \text{e, inoltre,} \quad \nabla V(\mathbf{y})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (7.27)$$

allora l'origine è asintoticamente stabile per (7.25).

Dimostrazione. Sia $\mathbf{y}(t)$ la traiettoria soluzione di (7.25), dove \mathbf{y}_0 è un generico punto nel suddetto intorno dell'origine. Evidentemente,

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{y}(t)) = \nabla V(\mathbf{y}(t))^T \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Pertanto $V(\mathbf{y}(t))$ ammette un limite, sia esso $V_\infty \geq 0$ per $t \rightarrow \infty$. Se questo limite fosse 0, la tesi sarebbe dimostrata. Se per assurdo così non fosse, allora $\exists \bar{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$ tale che $V(\bar{\mathbf{y}}) = V_\infty$. Considerando la traiettoria soluzione che parte da $\bar{\mathbf{y}}$, $\mathbf{y}(t; 0, \bar{\mathbf{y}})$, si avrebbe dunque

$$V(\mathbf{y}(t; 0, \bar{\mathbf{y}})) = V_\infty > 0, \quad t \geq 0,$$

ma questo è assurdo, avendosi

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{y}(0; 0, \bar{\mathbf{y}})) = \nabla V(\bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}) < 0. \quad \square$$

Definizione 7.3 Una funzione che soddisfi le (7.26)-(7.27), si dice funzione di Lyapunov per (7.25).

Osserviamo che, essendo $V(\mathbf{y})$ positiva, ed avendosi $V(\mathbf{y}) \rightarrow \infty$, per $\mathbf{y} \rightarrow \infty$. Le sue curve di livello,

$$\Gamma(c) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : V(\mathbf{y}) = c\}, \quad c \geq 0,$$

saranno formate da superfici chiuse. Una di queste delimiterà una regione, sia essa $\mathcal{R}(c)$, che conterrà l'origine. È interessante osservare che, se $\exists c > 0$ per cui

$$\nabla V(\mathbf{y})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}) < 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \partial \mathcal{R}(c),$$

poichè $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ per le soluzioni di (7.25), mentre $\nabla V(\mathbf{y})$ è un vettore ortogonale alla superficie di livello, e diretto verso valori crescenti di c , questo significa che traiettorie del sistema dinamico indotto da (7.25) che originano da punti su $\partial \mathcal{R}(c)$, saranno dirette verso l'interno di questa regione. Questo significa che, una volta che una traiettoria entra in $\mathcal{R}(c)$, non ne uscirà più. Per questo motivo, diremo che $\mathcal{R}(c)$ è una *regione invariante* per il sistema dinamico. Come caso particolare, $\Gamma(0) = \mathcal{R}(0) = \{\mathbf{0}\}$, il punto di equilibrio di (7.25).

Argomenti del tutto analoghi possono essere utilizzati nel caso del sistema di equazioni alle differenze del primo ordine

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \quad \mathbf{y}_{n_0} \in \mathbb{R}^m \text{ assegnato.} \quad (7.28)$$

Supporremo, al solito, che l'origine sia l'unico punto critico per (7.28):

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Se esiste una funzione continua $V : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}) &\geq 0, \\ V(\mathbf{y}) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}, \\ V(\mathbf{y}) &\rightarrow \infty \quad \text{per} \quad \mathbf{y} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (7.29)$$

vale il seguente risultato, che è la versione discreta del Teorema 7.7.

Teorema 7.8 (Teorema di Lyapunov, versione discreta) Se, per ogni \mathbf{y} in un intorno dell'origine vale:

$$\Delta V(\mathbf{y}) \equiv V(\mathbf{f}(\mathbf{y})) - V(\mathbf{y}) \leq 0, \quad e, \text{ inoltre,} \quad \Delta V(\mathbf{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (7.30)$$

allora l'origine è asintoticamente stabile per (7.28).

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 7.7. \square

Definizione 7.4 Una funzione che soddisfi le (7.29)-(7.30), si dice funzione di Lyapunov per (7.28).

7.4 Un'applicazione: le equazioni di van der Pol

Esaminiamo il sistema dinamico indotto dalle seguenti equazioni di van der Pol:

$$x' = y, \quad y' = -x + \mu y(1 - x^2), \quad (7.31)$$

ottenute dall'equazione del secondo ordine

$$x'' = -x + \mu x'(1 - x^2),$$

in cui $\mu \in \mathbb{R}$ è un *parametro modulatore* per la dinamica. Osserviamo che l'unico punto critico per (7.31) è l'origine:

$$\bar{x} = \bar{y} = 0.$$

Per studiarne la stabilità, consideriamo la parte lineare dell'equazione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice Jacobiana sono dati da

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}.$$

Si distinguono, pertanto, i seguenti casi significativi.

- $\mu \leq -2$. In questo caso, gli autovalori sono reali e negativi. Pertanto si ottiene una configurazione di nodo stabile (degenere, quando $\mu = -2$).
- $-2 < \mu < 0$. In questo caso, gli autovalori sono complessi e coniugati con parte reale negativa. Si otterrà, pertanto, una configurazione di fuoco stabile.
- $\mu = 0$. In questo caso, le (7.31) si riducono all'oscillatore lineare,

$$x' = y, \quad y' = -x,$$

e, quindi, una configurazione di centro.

- $\mu > 0$. In questo caso, l'origine è instabile.

Il caso $\mu > 0$ è senz'altro il più interessante, perchè è quello in cui la dinamica non è immediatamente nota *a priori*. Vediamo di discuterla con gli strumenti a nostra disposizione. In Figura 7.2 è raffigurata la traiettoria che parte dal punto iniziale $(x_0, y_0) = (2, 0)$ che, come si può vedere, è chiusa e, pertanto, la soluzione sarà di tipo periodico (in generale, il periodo si vede essere approssimativamente dato da 2μ), come si evince dalla prima componente, $x(t)$, graficata in Figura 7.3. Questa orbita periodica, diviene la struttura di equilibrio asintoticamente stabile, quando l'origine diviene instabile. Essa costituisce un cosiddetto *ciclo limite*, che è un esempio di struttura di equilibrio di dimensione 1 (la curva è, infatti, rettificabile).⁹ Quindi questo significa che le traiettorie sono *attratte* verso il ciclo limite che è anche una struttura *invariante* (ovvero, partendo da un suo qualunque punto, si rimane su di essa). Vediamo, qualitativamente, di spiegare questo comportamento. Se si parte con una traiettoria vicino all'origine, essendo questa instabile, la traiettoria si allontanerà da essa, fino

⁹Evidentemente, un punto di equilibrio è un insieme critico di dimensione 0.

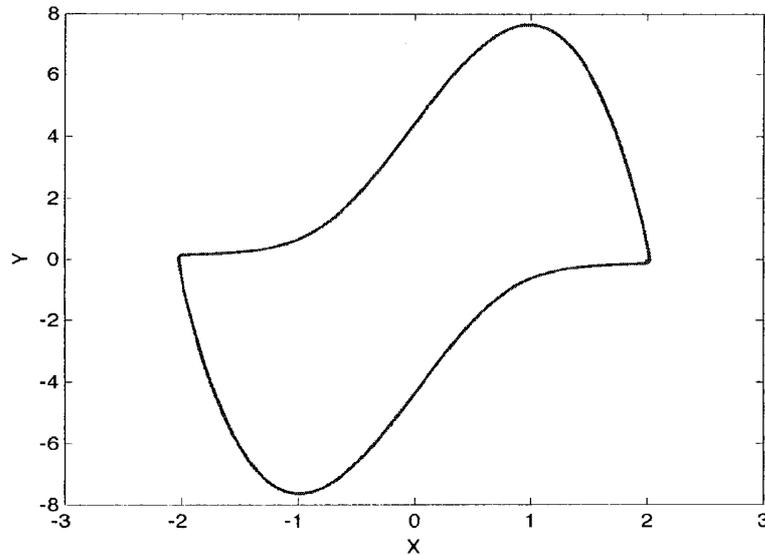


Figura 7.2: ciclo limite per le equazioni di van der Pol (7.31), $\mu = 5$.

a raggiungere il ciclo limite. Vediamo cosa succede ad una traiettoria che parta dall'esterno del ciclo limite. A tal fine, consideriamo, quindi, una circonferenza centrata nell'origine, di raggio $r > 2\mu$:¹⁰

$$V(x, y) = x^2 + y^2 - r^2.$$

Da (7.31), segue che

$$\nabla V(x, y)^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mu y^2(1 - x^2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1, 1).$$

Se si parte da un punto con $|x| > 1$, la traiettoria si muoverà verso circonferenze di raggio inferiore, fino a raggiungere il ciclo limite. Se si parte da un punto in cui $|x| < 1$, la traiettoria potrà allontanarsi, fino a raggiungere un punto di massimo per la y , che si trova imponendo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \mu(1 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{\mu(1 - x^2)} \equiv \varphi(x), \quad x \in (0, 1).$$

Quindi, i punti di estremo della traiettoria si troveranno su $\varphi(x)$. Raggiunto questo punto, la traiettoria si avvicinerà monotonicamente all'origine, fino a raggiungere il ciclo limite. Questo è raffigurato schematicamente in Figura 7.4, contenente 2 traiettorie, una che parte da un punto con $|x| < 1$, l'altra con $|x| > 1$: entrambe, come si vede, convergono al ciclo limite.

Per ultimo, in Figura 7.5 vediamo l'evoluzione del ciclo limite da $\mu = 0$ (in questo caso, tuttavia, esso non è asintoticamente stabile, ma solo stabile) a $\mu = 5$. L'ampiezza in x rimane essenzialmente quella originaria, mentre quella in y diviene, asintoticamente, $\simeq 1.5\mu$.

¹⁰Questo garantisce di essere all'esterno del ciclo limite.

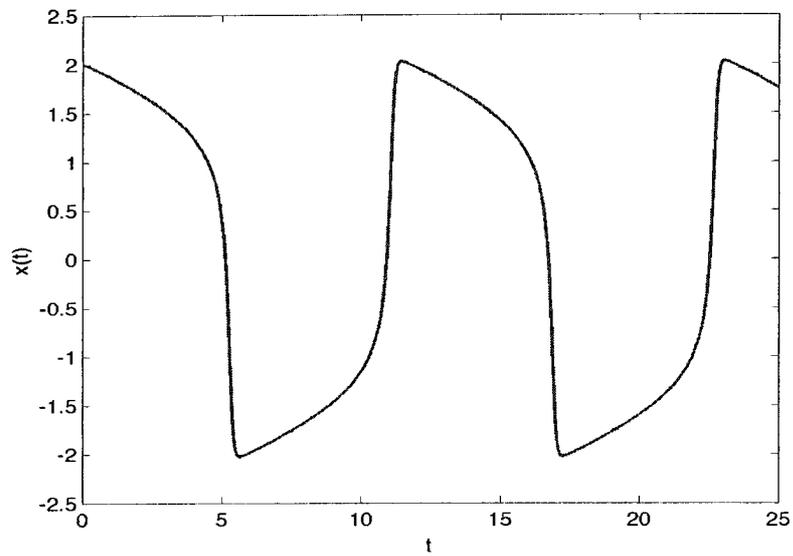


Figura 7.3: prima componente della soluzione, equazioni di van der Pol (7.31), $\mu = 5$.

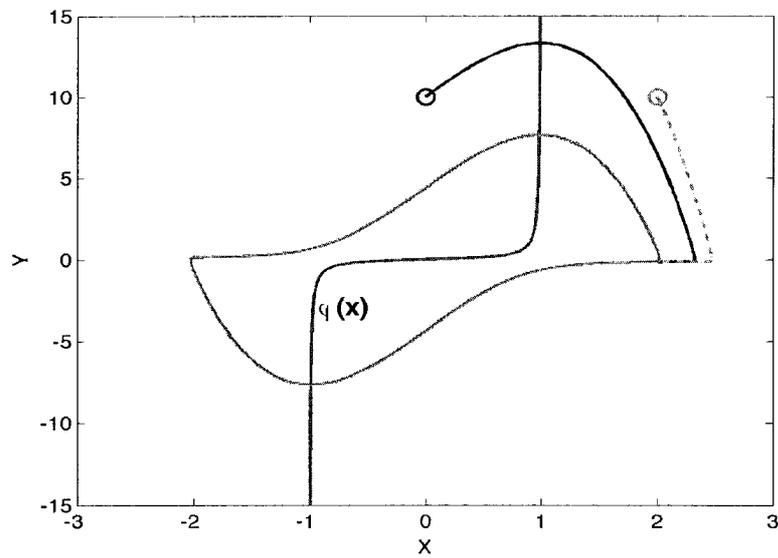


Figura 7.4: traiettorie per le equazioni di van der Pol (7.31), $\mu = 5$; il cerchietto denota il punto iniziale della traiettoria.

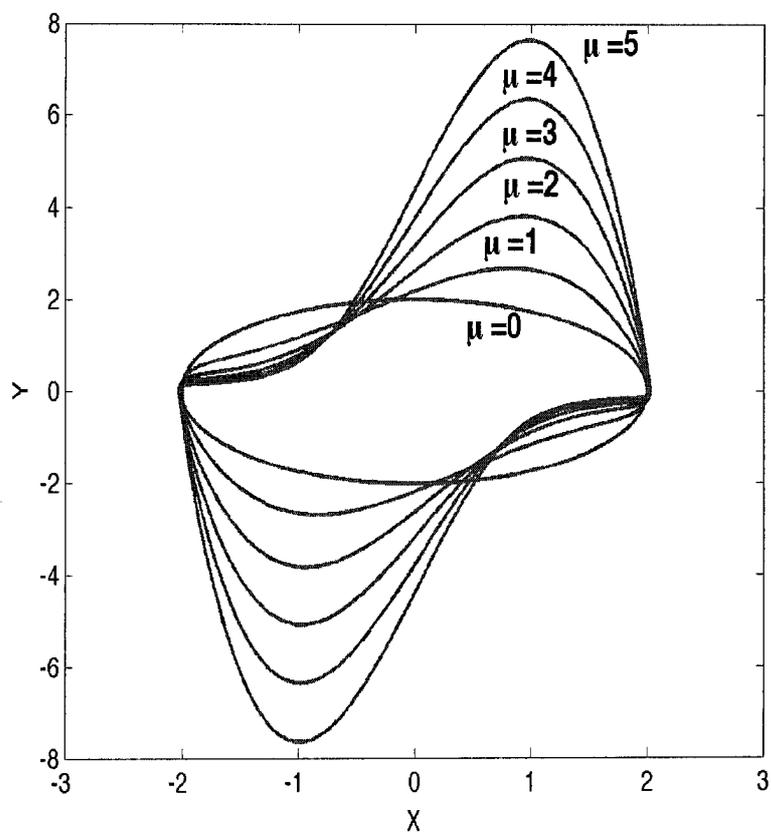


Figura 7.5: ciclo limite per le equazioni di van der Pol (7.31), $\mu = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

7.5 Ancora sul concetto di *stiffness*

Il problema di van der Pol (7.31) fornisce lo spunto per approfondire la nozione di *stiffness* introdotta in Sezione 6.5. La nostra analisi generalizza quella introdotta per il caso lineare al caso nonlineare. Dato, quindi, il problema nonlineare (che supporremo per semplicità autonomo)

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (7.32)$$

perturbandone la condizione iniziale con un vettore $\delta\mathbf{y}_0 \equiv \boldsymbol{\eta}$ “infinitesimo”, si ha che la differenza tra la soluzione originaria, e quella del problema perturbato, sia essa $\delta\mathbf{y}(t)$, soddisferà il *problema variazionale*

$$\delta\mathbf{y}'(t) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}(t))\delta\mathbf{y}(t), \quad t \in [t_0, T], \quad \delta\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\eta}, \quad (7.33)$$

in cui

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}(t)) \equiv A(t),$$

è la matrice Jacobiana di $\mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$. Se la perturbazione non è infinitesima, (7.33) costituisce la parte lineare del problema linearizzato lungo $\mathbf{y}(t)$ e, utilizzando argomenti analoghi a quelli visti per il Teorema 7.6, l'asintotica stabilità dell'origine per la soluzione di (7.33) ne implica l'asintotica stabilità per il problema completo. Considerando, quindi, la corrispondente matrice fondamentale:

$$\Phi'(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I,$$

se ne deduce che la soluzione del problema (7.33) è data da

$$\delta\mathbf{y}(t) = \Phi(t, t_0)\boldsymbol{\eta}, \quad t \in [t_0, T].$$

Come nel caso lineare, consideriamo le seguenti due norme dell'errore:

$$\|\delta\mathbf{y}\|_{\infty} = \max_{t_0 \leq t \leq T} \|\delta\mathbf{y}(t)\| = \frac{\max_{t_0 \leq t \leq T} \|\delta\mathbf{y}(t)\|}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \|\boldsymbol{\eta}\| \equiv \kappa(\boldsymbol{\eta})\|\boldsymbol{\eta}\|,$$

$$\|\delta\mathbf{y}\|_1 = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0 \leq t \leq T} \|\delta\mathbf{y}(t)\| dt = \frac{\int_{t_0 \leq t \leq T} \|\delta\mathbf{y}(t)\| dt}{(T - t_0)\|\boldsymbol{\eta}\|} \|\boldsymbol{\eta}\| \equiv \gamma(\boldsymbol{\eta})\|\boldsymbol{\eta}\|,$$

che misurano, come in Sezione 6.5, l'errore massimo e l'errore medio dovuto alla perturbazione iniziale $\boldsymbol{\eta}$. Possiamo quindi definire il *rapporto di stiffness*

$$\sigma = \max_{\boldsymbol{\eta}} \sigma(\boldsymbol{\eta}), \quad \text{con} \quad \sigma(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\kappa(\boldsymbol{\eta})}{\gamma(\boldsymbol{\eta})}. \quad (7.34)$$

Definizione 7.5 Diremo che il problema (7.32) è stiff se $\sigma \gg 1$.

Osservazione 7.7 È opportuno ribadire che il concetto di *stiffness* si definisce per un problema, e non per un'equazione. Infatti, la stessa equazione definisce problemi diversi, a seconda del punto iniziale scelto. Al contrario del caso lineare, in cui la *stiffness* non dipende dalla condizione iniziale, per equazioni nonlineari, alcune condizioni iniziali possono dare origine a problemi stiff, ed altri originare problemi non stiff. La ragione di questo deriva dal fatto che il problema variazionale (7.33) è definito lungo la soluzione di riferimento e, quindi, dipende dal punto iniziale in (7.32).

Riportiamo, nel seguito, alcuni esempi che illustrano adeguatamente la precedente definizione.

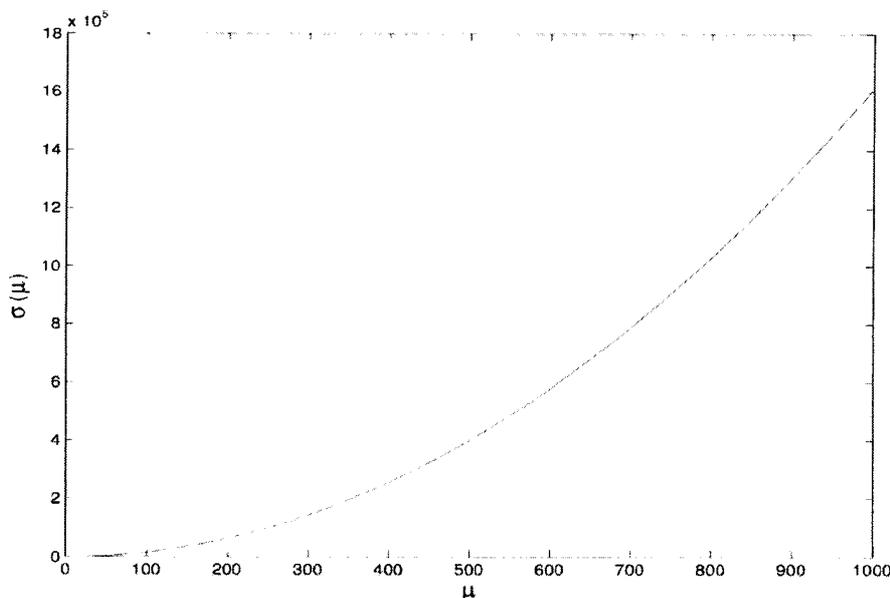


Figura 7.6: *stiffness* del problema di van der Pol (7.35) al crescere di μ .

Il problema di van der Pol

Consideriamo il problema:

$$x' = y, \quad y' = -x + \mu y(1 - x^2), \quad t \in [0, 2\mu], \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0, \quad (7.35)$$

la cui soluzione descrive il ciclo limite nel piano delle fasi (infatti, il periodo della soluzione è $\simeq 2\mu$, per $\mu \gg 1$.) In Figura 7.6, grafichiamo il rapporto di *stiffness* (7.34) al crescere di μ . Da essa si evince come il problema diventi più *stiff* al crescere del parametro μ . Questo è infatti noto dalla pratica computazionale, in cui si sperimenta una crescente difficoltà nella risoluzione numerica del problema, per il quale i metodi espliciti sono del tutto inefficaci, anche per modesti valori del parametro μ .

Il problema di Robertson

Questo problema, molto noto nella letteratura del settore, è dato da

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3, \\ y_2' &= 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2, \\ y_3' &= 3 \cdot 10^7 y_2^2, \quad t \in [0, T], \\ y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = y_3(0) = 0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

In Figura 7.7, è graficato il rapporto di *stiffness* (7.34) in funzione dell'ampiezza T dell'intervallo di integrazione. In questo caso, il rapporto di *stiffness* graficato è stato ottenuto considerando una perturbazione della forma $(0, \varepsilon, -\varepsilon)^T$, con $\varepsilon \approx 0$. Anche in questo caso, si vede che la *stiffness* del problema aumenta al crescere di T .

Esercizio 7.1 *Dimostrare che, per il problema (7.36), la quantità $y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ è costante per $t \geq 0$. Essa costituisce, quindi, un invariante lineare per il corrispondente sistema dinamico. Dimostrare che ogni metodo consistente preserva questo invariante nella soluzione discreta.*

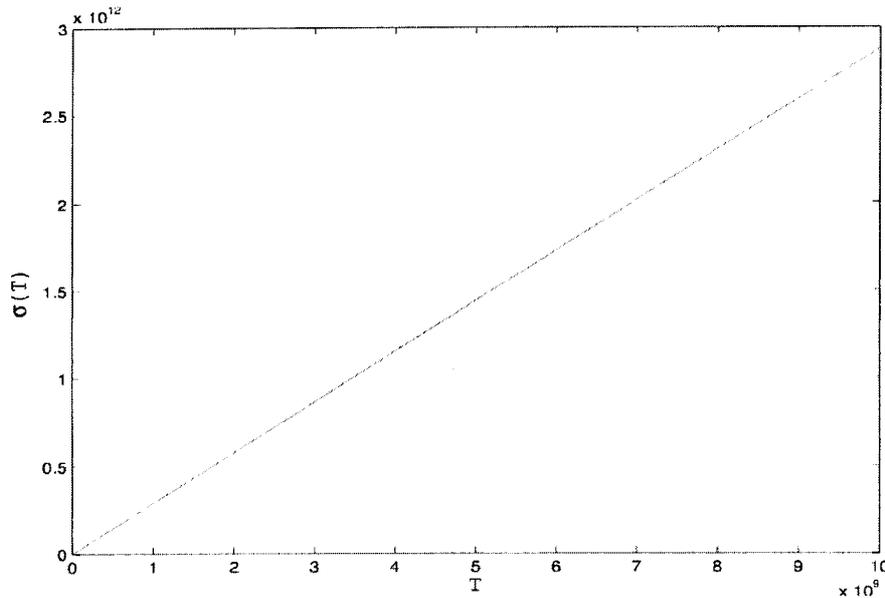


Figura 7.7: *stiffness* del problema di Robertson (7.36) in funzione dell'ampiezza T dell'intervallo di integrazione.

Il problema di Kreiss

Questo problema, denominato *problema di Kreiss*, è lineare ma *non autonomo*.¹¹

$$\mathbf{y}'(t) = Q^T(t) \begin{pmatrix} -1 & \\ & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} Q(t), \quad t \in [0, 4\pi], \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (7.37)$$

in cui \mathbf{y}_0 è dato¹² e

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Considerando una perturbazione iniziale della forma $(-\varepsilon, 1)^T$, si ottiene il rapporto di *stiffness* in funzione di ε raffigurato in Figura 7.8, che dimostra come esso si comporti come $O(\varepsilon^{-1})$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Consideriamo, ora, la seguente modifica del problema (7.8),

$$\mathbf{y}'(t) = Q_\varepsilon^{-1}(t) P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & \\ & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} P Q_\varepsilon(t), \quad t \in [0, 4\pi], \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (7.38)$$

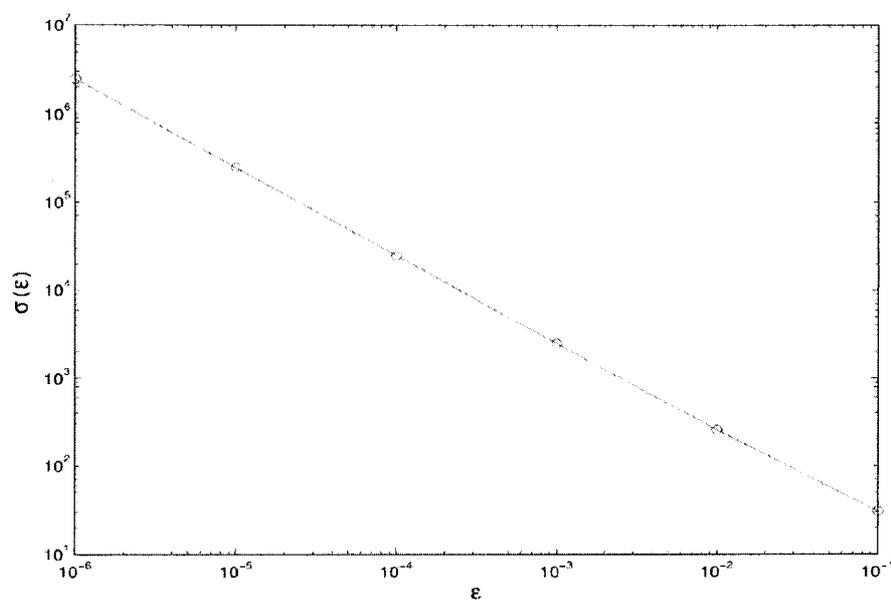
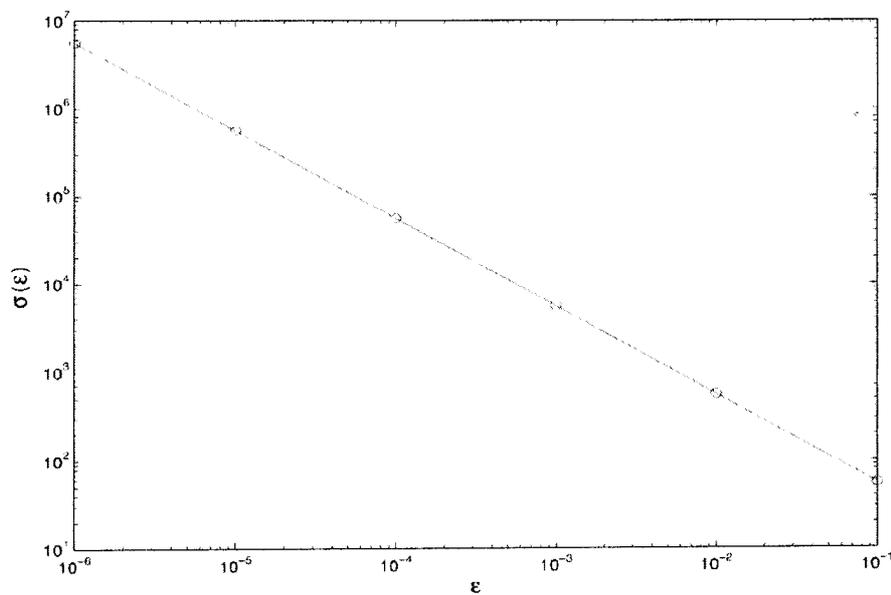
in cui:

$$Q_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ e^{\sin t} & e^{\cos t} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anche ora, considerando una perturbazione iniziale della forma $(-\varepsilon, 1)^T$, si ottiene il rapporto di *stiffness* in funzione di ε raffigurato in Figura 7.9, che dimostra come esso si comporti come $O(\varepsilon^{-1})$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

¹¹Ovvero, la matrice di trasformazione dipende dal t .

¹²Il problema è lineare e, quindi, la sua *stiffness* sarà indipendente dalla condizione iniziale.

Figura 7.8: *stiffness* del problema (7.8) in funzione di ϵ .Figura 7.9: *stiffness* del problema (7.38) in funzione di ϵ .

Una osservazione

È interessante sottolineare che, in tutti i precedenti esempi, numericamente si è osservato che la perturbazione $\boldsymbol{\eta}$ che massimizza il rapporto $\sigma(\boldsymbol{\eta})$ in (7.34) è ottenuto considerando un vettore proporzionale all'autovettore dominante dello Jacobiano $J_f(\mathbf{y}(t))$ per $t \approx t_0$ (vedi (7.33)). Osserviamo che, nel caso di un problema lineare autonomo, questa scelta è proprio quella che “attiva” l'autovalore dominante, sia esso λ_{\max} . Pertanto, nel caso in cui la matrice sia diagonalizzabile, il rapporto di *stiffness* (7.34) si riduce all'espressione

$$\sigma = |\lambda_{\max}|(T - t_0),$$

già vista in Sezione 6.5.