

Capitolo 6

Sistemi lineari di equazioni

In questo capitolo tratteremo di sistemi dinamici continui e discreti descritti da sistemi di equazioni lineari, differenziali o alle differenze, del primo ordine. Vedremo le strette connessioni formali nei risultati ad essi connessi, trattando, in maggior dettaglio, il caso in cui i sistemi hanno coefficienti costanti. Esamineremo, inoltre, alcuni casi descritti da matrici con particolari proprietà strutturali, illustrando anche dei modelli in cui queste sono utilizzate. Per ultimo, esamineremo la corrispondenza qualitativa tra i sistemi dinamici continui ed i corrispondenti sistemi dinamici discreti indotti dai metodi numerici di approssimazione.

6.1 Il caso continuo

Si consideri il sistema di equazioni lineari non omogeneo:

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t), \quad t \geq t_0, \quad (6.1)$$

in cui, per ogni $t \geq t_0$, $A(t)$ è una matrice $m \times m$ e $\mathbf{y}(t), \mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^m$. Supporremo che le componenti di entrambi siano funzioni almeno continue di t .¹ Alla (6.1) si associa l'equazione omogenea associata

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t), \quad t \geq t_0. \quad (6.2)$$

Ricerchiamone la soluzione generale che, successivamente, ci permetterà di ottenere quella di (6.1). Supponiamo che esista una funzione a valori matriciali, sia essa $W(t)$, avente le stesse dimensioni di $A(t)$, che soddisfi l'equazione

$$W'(t) = A(t)W(t), \quad t \geq t_0, \quad \det(W(t_0)) \neq 0. \quad (6.3)$$

Per poter procedere oltre, necessitiamo del seguente risultato preliminare.

Lemma 6.1 *Sia $X, I \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $h \approx 0$. Allora:*

$$\det(I + hX + O(h^2)) = 1 + h \operatorname{trace}(X) + O(h^2).$$

Dimostrazione. Verifichiamo l'enunciato nel caso, assai semplice, $n = 2$: per il caso generale, si possono utilizzare argomenti analoghi. Se $X = (x_{ij})$, allora:

$$\det \begin{pmatrix} 1 + hx_{11} + O(h^2) & hx_{12} + O(h^2) \\ hx_{21} + O(h^2) & 1 + hx_{22} + O(h^2) \end{pmatrix} = 1 + h(x_{11} + x_{22}) + O(h^2). \quad \square$$

Da questo risultato, discende facilmente la seguente proprietà della matrice $W(t)$ in (6.3).

¹Per semplicità, supporremo che $A(t)$ sia anche derivabile, con derivata continua.

Teorema 6.1 Sia $W(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ soluzione della (6.3). Allora $\det(W(t)) \neq 0, \forall t \geq t_0$.

Dimostrazione. Si ponga $x(t) = \det(W(t))$. Si ottiene, dunque, per il precedente Lemma 6.1:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(W(t) + hA(t)W(t) + O(h^2)W(t)) - \det(W(t))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(W(t)) \det(I + hA(t) + O(h^2)) - \det(W(t))}{h} \\ &= \det(W(t)) \text{trace}(A(t)) \equiv \text{trace}(A(t))x(t). \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\det(W(t)) = \det(W(t_0)) e^{\int_{t_0}^t \text{trace}(A(\tau)) d\tau}, \quad t \geq t_0.$$

Se ne conclude quindi che

$$\det(W(t_0)) \neq 0 \iff \det(W(t)) \neq 0, \quad t \geq t_0. \square$$

In virtù di questo risultato, risulta essere ben definita la seguente funzione di matrice.

Definizione 6.1 Definiamo la matrice fondamentale della (6.3) come

$$\Phi(t, s) = W(t)W^{-1}(s).$$

Valgono le seguenti proprietà della matrice fondamentale:

- $\Phi(t, s)\Phi(s, \tau) = \Phi(t, \tau)$;
- $\Phi(t, s)^{-1} = \Phi(s, t)$;
- la matrice fondamentale è soluzione del problema:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad t \geq t_0, \quad \Phi(t_0, t_0) = I,$$

essendo, al solito, I la matrice identità;

Ricerchiamo, ora, la soluzione della equazione omogenea (6.2), soddisfacente la condizione iniziale $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. La cercheremo nella

$$\mathbf{y}(t) = W(t)\mathbf{c},$$

in cui il vettore \mathbf{c} è da determinare. Si ottiene, in virtù della (6.3),

$$\mathbf{y}'(t) = W'(t)\mathbf{c} = A(t)W(t)\mathbf{c} \equiv A(t)\mathbf{y}(t), \quad t \geq t_0.$$

Pertanto, $\mathbf{y}(t)$ soddisfa l'equazione omogenea. Imponendo la condizione iniziale, si ottiene:

$$\mathbf{y}(t_0) \equiv W(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{y}_0 \implies \mathbf{c} = W(t_0)^{-1}\mathbf{y}_0.$$

In altre parole, la soluzione del problema ai valori iniziali

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t), \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (6.4)$$

è data da:

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{y}_0, \quad t \geq t_0. \quad (6.5)$$

Generalizziamo questo risultato, per determinare la soluzione dell'equazione non omogenea (6.1) soddisfacente la stessa condizione iniziale:

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t), \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (6.6)$$

In questo caso, ricerchiamo la soluzione nella forma

$$\mathbf{y}(t) = W(t)\mathbf{c}(t). \quad (6.7)$$

Pertanto,

$$\mathbf{y}'(t) = W'(t)\mathbf{c}(t) + W(t)\mathbf{c}'(t) = A(t)W(t)\mathbf{c}(t) + W(t)\mathbf{c}'(t) \equiv A(t)\mathbf{y}(t) + W(t)\mathbf{c}'(t).$$

Dovrà, pertanto, aversi:

$$\mathbf{c}'(t) = W(t)^{-1}\mathbf{b}(t) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t_0) + \int_{t_0}^t W(s)^{-1}\mathbf{b}(s)ds.$$

Al solito, imponendo la condizione iniziale, si ottiene

$$\mathbf{c}(t_0) = W(t_0)^{-1}\mathbf{y}_0$$

e, pertanto, dalla (6.7):

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{b}(s)ds, \quad t \geq t_0, \quad (6.8)$$

è la soluzione del problema ai valori iniziali (6.6).

Osservazione 6.1 Nel caso in cui $A(t) \equiv A$, $t \geq t_0$, allora si verifica facilmente che:

$$\Phi(t, s) = e^{A(t-s)}.$$

Pertanto, le (6.5) e (6.8) divengono, rispettivamente:

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0, \quad t \geq t_0, \quad (6.9)$$

e

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\mathbf{b}(s)ds, \quad t \geq t_0. \quad (6.10)$$

Inoltre, nel caso in cui $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{b}$, $t \geq t_0$, quest'ultima diviene:

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 - \int_{t_0}^t e^{As}ds \mathbf{b}, \quad t \geq t_0. \quad (6.11)$$

Esercizio 6.1 Dimostrare che la (6.11) si riduce, nel caso in cui A sia nonsingolare, alla più semplice espressione:

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + (e^{A(t-t_0)} - I)A^{-1}\mathbf{b} \equiv e^{A(t-t_0)}(\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}) + \bar{\mathbf{y}}, \quad (6.12)$$

in cui $\bar{\mathbf{y}} = -A^{-1}\mathbf{b}$ è soluzione costante dell'equazione (anche detta soluzione di equilibrio).

È utile osservare, relativamente alla (6.12), che nel caso in cui A abbia autovalori tutti a parte reale negativa, allora A è nonsingolare, e quindi $\bar{\mathbf{y}}$ è definito, e, inoltre, questo punto di equilibrio è anche asintoticamente stabile, poiché

$$\mathbf{y}(t) \rightarrow \bar{\mathbf{y}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

6.2 Il caso discreto

Consideriamo, ora, il sistema di equazioni alle differenze lineari del primo ordine,

$$\mathbf{y}_{n+1} = A_n \mathbf{y}_n + \mathbf{b}_n, \quad n \geq n_0, \quad (6.13)$$

in cui assumiamo $\mathbf{y}_n, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^m$ (quest'ultimo vettore, noto per ogni $n \geq n_0$), e A_n matrice $m \times m$ *nongingolare*, per ogni $n \geq n_0$. Come per il caso continuo, si considera l'*omogenea associata*,

$$\mathbf{y}_{n+1} = A_n \mathbf{y}_n, \quad n \geq n_0, \quad (6.14)$$

e l'equazione matriciale:

$$W_{n+1} = A_n W_n, \quad n \geq n_0, \quad \det(W_{n_0}) \neq 0. \quad (6.15)$$

Come per il caso continuo, si vede facilmente che, essendo

$$\det(A_n) \neq 0, \quad n \geq n_0,$$

allora

$$\det(W_n) = \det \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A_i W_{n_0} \right) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} \det(A_i) \right) \det(W_{n_0}) \neq 0, \quad n \geq n_0.$$

Questo consente di ottenere la soluzione della (6.14), soddisfacente la condizione iniziale \mathbf{y}_{n_0} , nella forma

$$\mathbf{y}_n = W_n \mathbf{c} \equiv W_n W_{n_0}^{-1} \mathbf{y}_{n_0} \equiv \Phi_{n,n_0} \mathbf{y}_{n_0}, \quad n \geq n_0, \quad (6.16)$$

dove la *matrice fondamentale* Φ_{n,n_0} soddisfa proprietà analoghe a quelle della controparte continua:

- $\Phi_{n,k} \Phi_{k,s} = \Phi_{n,s}$;
- $\Phi_{n,s}^{-1} = \Phi_{s,n}$;
- la matrice fondamentale è soluzione del problema:

$$\Phi_{n+1,n_0} = A_n \Phi_{n,n_0}, \quad n \geq n_0, \quad \Phi_{n_0,n_0} = I.$$

Per determinare la soluzione dell'equazione non omogenea (6.13), soddisfacente la condizione iniziale \mathbf{y}_{n_0} , si porrà

$$\mathbf{y}_n = W_n \mathbf{c}_n, \quad n \geq n_0, \quad (6.17)$$

ottenendo pertanto:

$$\mathbf{y}_{n+1} = W_{n+1} \mathbf{c}_{n+1} = A_n W_n \mathbf{c}_{n+1} \equiv A_n \mathbf{y}_n + W_{n+1} \Delta \mathbf{c}_n, \quad n \geq n_0.$$

Imponendo la condizione iniziale, e richiedendo che la (6.13) sia soddisfatta, si ottiene:

$$\mathbf{c}_{n_0} = W_{n_0}^{-1} \mathbf{y}_{n_0}, \quad \mathbf{c}_{n+1} = \mathbf{c}_n + W_{n+1}^{-1} \mathbf{b}_n, \quad n \geq n_0.$$

Pertanto,

$$\mathbf{c}_n = W_{n_0}^{-1} \mathbf{y}_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} W_{i+1}^{-1} \mathbf{b}_i, \quad n \geq n_0,$$

da cui, per la (6.17),

$$\mathbf{y}_n = \Phi_{n,n_0} \mathbf{y}_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi_{n,i+1} \mathbf{b}_i, \quad n \geq n_0. \quad (6.18)$$

Osservazione 6.2 *Nel caso in cui $A_n \equiv A$, matrice costante, allora*

$$\Phi_{n,s} = A^{n-s},$$

e, pertanto, la (6.18) diviene:

$$\mathbf{y}_n = A^{n-n_0} \mathbf{y}_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} A^{n-i-1} \mathbf{b}_i, \quad n \geq n_0.$$

Inoltre, se anche $\mathbf{b}_n \equiv \mathbf{b}$, $n \geq n_0$, e $1 \neq \sigma(A)$, allora

$$\bar{\mathbf{y}} = (I - A)^{-1} \mathbf{b} \quad (6.19)$$

è soluzione costante dell'equazione (anche detta, in analogia con in caso continuo, soluzione di equilibrio). In tal caso, la (6.18) diviene (vedi (6.19)):

$$\mathbf{y}_n = A^{n-n_0} \mathbf{y}_{n_0} + (I - A^{n-n_0})(I - A)^{-1} \mathbf{b} \equiv A^{n-n_0} (\mathbf{y}_{n_0} - \bar{\mathbf{y}}) + \bar{\mathbf{y}}, \quad n \geq n_0. \quad (6.20)$$

Analogamente a quanto avviene per il caso continuo, nel caso in cui si avesse $\rho(A) < 1$, $(I - A)$ sarebbe nonsingolare e, quindi (6.19) sarebbe ben definito. Inoltre, dalla (6.20) segue che:

$$\mathbf{y}_n \rightarrow \bar{\mathbf{y}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

6.3 Sistemi dinamici nel piano delle fasi

Esaminiamo il comportamento delle traiettorie di un sistema dinamico continuo di due variabili, in cui si suppone di aver traslato il punto di equilibrio nell'origine:²

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

In questo caso, denotando con $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, possono aversi le seguenti possibilità:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 < 0 \end{cases}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \lambda & \text{semisemplice} \\ \lambda & \text{non semisemplice} \end{cases}$
- $\lambda_1 = \lambda = \bar{\lambda}_2 \neq \lambda_2$

che esaminiamo nel seguito.

²Per semplicità espositiva, supporremo che la matrice di trasformazione sia nonsingolare.

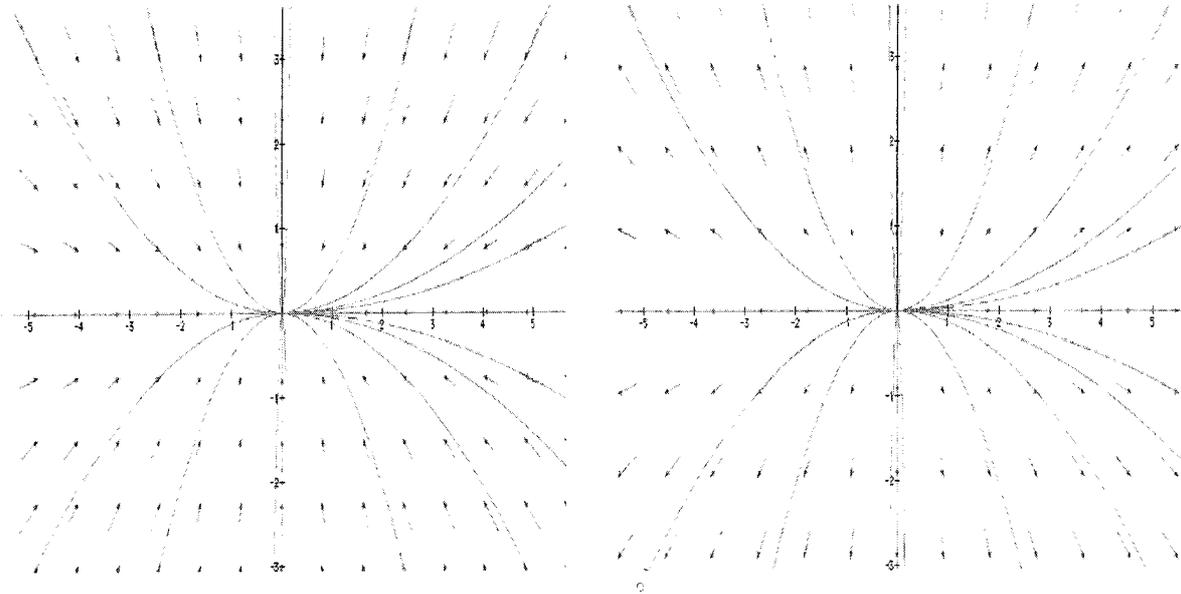


Figura 6.1: configurazione a nodo stabile (a sinistra) e nodo instabile (a destra).

Il caso $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

In questo caso, è possibile diagonalizzare la matrice A mediante una trasformazione di similitudine reale, ottenendo le equazioni:

$$y_1' = \lambda_1 y_1, \quad y_2' = \lambda_2 y_2.$$

Dividendo membro a membro, si ottiene:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_2 y_2}{\lambda_1 y_1} \equiv \kappa \frac{y_2}{y_1},$$

da cui si ottiene facilmente che:

$$y_2 = c y_1^\kappa,$$

dove la costante c dipende dalle condizioni iniziali. Si distinguono, a questo punto, i due sottocasi:

- $\lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow \kappa > 0$. In questo caso si ottiene una famiglia di parabole passanti per l'origine, in cui, a partire dal punto iniziale, il parametro t descrive la traiettoria che sarà *verso* l'origine, quando $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, o si *allontanerà* da essa, quando $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: nel primo caso si ottiene una configurazione a *nodo stabile* (vedi Figura 6.1 a sinistra); nel secondo caso, si ottiene una configurazione a *nodo instabile* (vedi Figura 6.1 a destra).
- $\lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow \kappa < 0$. In questo caso, si ottiene una famiglia di iperboli che, evidentemente, non passano dall'origine (che è instabile). Si ottiene, in questo caso, una configurazione a *sella* (vedi Figura 6.2).

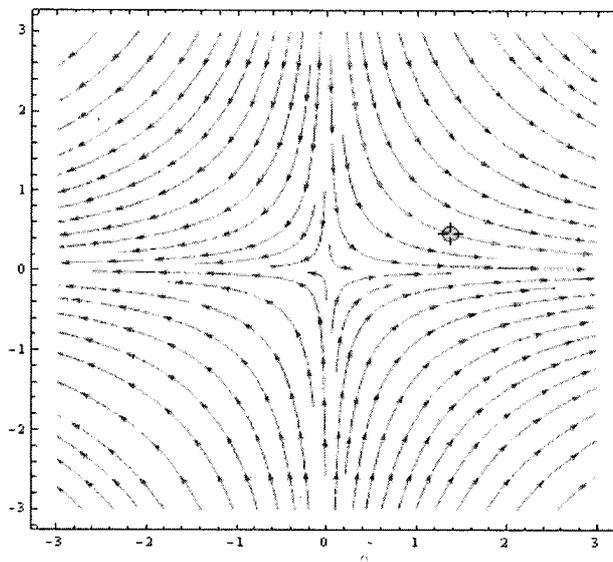


Figura 6.2: configurazione a sella (instabile)

Il caso $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

In questo caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$. Nel caso in cui l'autosalone sia semisemplice, allora è possibile trasformare per similitudine mediante una matrice reale, ottenendo:

$$y_1' = \lambda y_1, \quad y_2' = \lambda y_2.$$

Pertanto, procedendo in modo analogo a quanto visto prima si ottengono, nel piano delle fasi, le curve

$$y_1 = c y_2,$$

ovvero un fascio di rette passanti per l'origine. Se $\lambda < 0$, le traiettorie saranno dirette verso l'origine, ottenendo una configurazione di *nodo a stella stabile*, mentre si allontaneranno da essa se $\lambda >$, dando una configurazione di *nodo a stella instabile* (quest'ultima, raffigurata sulla sinistra in Figura 6.3). Nel caso in cui l'autosalone non sia semisemplice, si ottiene, portando a forma di Jordan la matrice A:

$$y_1' = \lambda y_1, \quad y_2' = y_1 + \lambda y_2.$$

La soluzione si vede essere data da:

$$y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = (y_2(0) + y_1(0)t)e^{\lambda t}.$$

Eliminando t tra le due equazioni, si ottiene:

$$y_2 = y_1 \left(\frac{y_2(0)}{y_1(0)} + \lambda^{-1} \log \frac{y_1}{y_1(0)} \right).$$

Questa definisce una configurazione a *nodo degenera* stabile (nel caso in cui sia $\lambda < 0$) o instabile (nel caso sia $\lambda > 0$). Quest'ultima configurazione è raffigurata a destra in Figura 6.3.

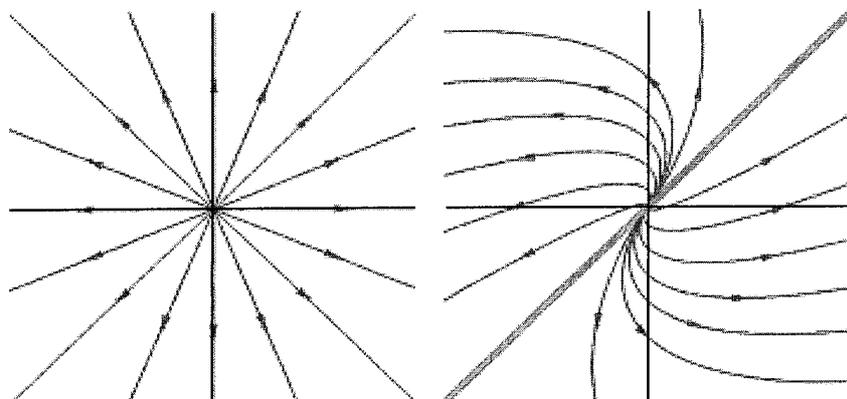


Figura 6.3: configurazione a nodo a stella instabile (a sinistra) e nodo degenere instabile (a destra).

Il caso $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

In questo caso, non è possibile diagonalizzare senza ottenere delle equazioni nel campo complesso. In tal caso, tuttavia, se

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

è possibile definire una matrice reale T tale che

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \equiv \hat{A}.$$

Ponendo le variabili trasformate in coordinate polari,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix},$$

imponendo che sia soddisfatta l'equazione differenziale, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' \equiv \begin{pmatrix} \rho' \cos \theta - \theta' \rho \sin \theta \\ \rho' \sin \theta + \theta' \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta \\ \beta \cos \theta + \alpha \sin \theta \end{pmatrix} \equiv \hat{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Si perviene, pertanto, alle equazioni:

$$\rho' = \alpha\rho, \quad \theta' = \beta,$$

la cui soluzione è data da:

$$\rho(t) = \rho(0)e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \theta(0) + \beta t, \quad t \geq 0.$$

Queste sono le equazioni di spirali che si avvolgono intorno all'origine. Le traiettorie spiraleggeranno verso l'origine, se $\alpha < 0$, dando una configurazione di *fuoco stabile* o si allontaneranno dall'origine, nel caso in cui sia $\alpha > 0$, dando una configurazione di *fuoco instabile*. Quest'ultimo è raffigurato a sinistra in Figura 6.4.

Nel caso particolare in cui si abbia $\alpha = 0$, $\rho(t) \equiv \rho(0)$, $t \geq 0$. In questo modo si ottiene una configurazione a *centro*, che vede l'origine come un punto di equilibrio stabile. Le traiettorie, in questo caso, sono delle circonferenze, come raffigurato alla destra in Figura 6.4.

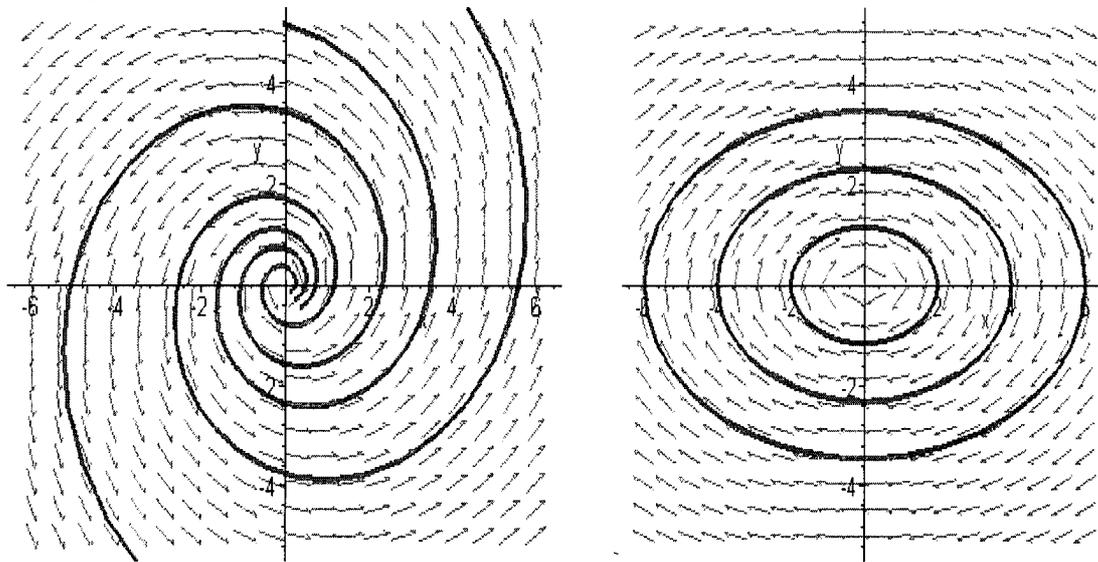


Figura 6.4: configurazione a fuoco instabile (a sinistra) e a centro (a destra).

Il caso discreto

Nel caso di un sistema dinamico discreto di due variabili, in cui si suppone di aver traslato il punto di equilibrio nell'origine, si ha:

$$\mathbf{y}_{n+1} = A\mathbf{y}_n, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Denotando con $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, possono essenzialmente aversi le seguenti possibilità:³

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} |\lambda_1|, |\lambda_2| < 1 \Rightarrow \text{nodo stabile;} \\ |\lambda_1|, |\lambda_2| > 1 \Rightarrow \text{nodo instabile;} \\ |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2| \Rightarrow \text{sella;} \end{cases}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} |\lambda| < 1 \text{ semisemplice} \Rightarrow \text{nodo a stella stabile;} \\ |\lambda| > 1 \text{ semisemplice} \Rightarrow \text{nodo a stella instabile;} \\ |\lambda| < 1 \text{ non semisemplice} \Rightarrow \text{nodo degenere stabile;} \\ |\lambda| > 1 \text{ non semisemplice} \Rightarrow \text{nodo degenere instabile;} \end{cases}$
- $\lambda_1 = \lambda = \bar{\lambda}_2 \neq \lambda_2 \Rightarrow \begin{cases} |\lambda| < 1 \Rightarrow \text{fuoco stabile;} \\ |\lambda| > 1 \Rightarrow \text{fuoco instabile;} \\ |\lambda| = 1 \Rightarrow \text{centro.} \end{cases}$

6.4 Risoluzione numerica di equazioni differenziali

Esaminiamo il caso in cui il sistema di equazioni differenziali lineare *autonomo*

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b},$$

³Alcuni casi ibridi, in cui uno degli autovalori abbia modulo uguale a 1, sono stati per brevità omessi.

ammetta un punto di equilibrio $\bar{\mathbf{y}} = -A^{-1}\mathbf{b}$ asintoticamente stabile. Traslando il punto di equilibrio nell'origine, ci riconduciamo allo studio dell'equazione omogenea

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \sigma(A) \subset \mathbb{C}^-.$$

In questo caso, mediante la trasformazione di similitudine (5.37)-(5.38) possiamo trasformare il problema in forma di Jordan e discutere, quindi, equazioni o sistemi di equazioni differenziali lineari della forma:

$$y' = \lambda y, \quad \Re(\lambda) < 0, \quad (6.21)$$

ovvero

$$y' = J(\lambda)y \equiv \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} y, \quad \Re(\lambda) < 0, \quad J(\lambda) \in \mathbb{C}^{p \times p}. \quad (6.22)$$

Nel primo caso, (6.21) altri non è che l'equazione test (4.28) usata per l'analisi di stabilità lineare dei metodi LMF. Pertanto, dovrà aversi $q = h\lambda \in \mathcal{D}$, la regione di assoluta stabilità (4.32) del metodo, sia esso a k passi, (ρ, σ) , dove al solito h denota il passo di discretizzazione. In questo caso, infatti, le radici

$$z_i(q), \quad i = 1, \dots, k,$$

del polinomio di stabilità

$$\pi(z, q) = \rho(z) - q\sigma(z) \quad (6.23)$$

hanno tutte modulo minore di 1. Pertanto, soddisfacendo la soluzione discreta $\{y_n\}$ l'equazione alle differenze lineari a coefficienti costanti

$$\rho(E)y_n - q\sigma(E)y_n = 0, \quad (6.24)$$

dove, al solito, E è l'operatore di shift, essa tenderà a 0, per $n \rightarrow \infty$, in virtù del Teorema 4.4.

Osservazione 6.3 Osserviamo che, poiché per definizione,

$$\pi(z_i(q), q) \equiv 0, \quad \forall q$$

ed essendo le radici $z_i(q)$ funzioni analitiche di q , allora segue che, per ogni $i = 1, \dots, k$:

$$\frac{d^j}{dq^j} \pi(z_i(q), q) = 0, \quad j = 0, 1, \dots$$

Ad esempio:

$$j = 0 : \quad \rho(z_i(q)) - q\sigma(z_i(q)) = 0, \quad (6.25)$$

$$j = 1 : \quad [\rho'(z_i(q)) - q\sigma'(z_i(q))] z_i'(q) - \sigma(z_i(q)) = 0. \quad (6.26)$$

Nel caso (6.22), sarà conveniente trasformare ulteriormente il problema in modo tale che

$$T^{-1}(hJ(\lambda))T = \begin{pmatrix} h\lambda & & & \\ 1 & h\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & h\lambda \end{pmatrix} \equiv J(q), \quad q = h\lambda.$$

Questo può essere fatto mediante la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & h^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & h^{1-p} \end{pmatrix},$$

come è facile verificare. In questo caso, la soluzione discreta soddisferà l'equazione alle differenze a coefficienti matriciali

$$\rho(E)y_n - J(q)\sigma(E)y_n = 0. \quad (6.27)$$

In questo caso, analogamente al caso di equazioni alle differenze scalari, si ricercano le soluzioni nella forma

$$y_n = Z^n c, \quad Z \in \mathbb{C}^{p \times p}, \quad c \in \mathbb{C}^p.$$

Conseguentemente, la matrice Z dovrà soddisfare l'equazione

$$\pi(Z, J(q)) \equiv \rho(Z) - J(q)\sigma(Z) = O. \quad (6.28)$$

In tal caso, Z si dirà essere un *solvente* del polinomio matriciale $\pi(Z, J(q))$. Vale il seguente risultato.

Teorema 6.2 *I solventi dell'equazione matriciale (6.28) sono dati da:*

$$Z_i = z_i(J(q)), \quad i = 1, \dots, k, \quad (6.29)$$

essendo $z_i(q)$ le radici del polinomio (6.23).

Dimostrazione. Infatti, $z_i(J(q))$ altri non è che la funzione $z_i(q)$ valutata nella matrice $J(q)$. \square

Osserviamo che dalla definizione di funzione di matrice segue, ponendo

$$H = J(q) - qI \equiv \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p},$$

che è chiaramente una matrice nilpotente di indice p :

$$Z_i \equiv z_i(q) = \sum_{j=1}^p \frac{z_i^{(j-1)}(q)}{(j-1)!} H^{j-1} = \begin{pmatrix} z_i(q) & & & \\ \frac{z_i'(q)}{1!} & z_i(q) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{z_i^{(p-1)}(q)}{(p-1)!} & \dots & \frac{z_i'(q)}{1!} & z_i(q) \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Verifichiamo, a titolo di esempio, che essa è un solvente nel caso $p = 2$.⁴ Utilizzando le (6.25)-(6.26), si ottiene:

$$\rho(Z_i) - J(q)\sigma(Z_i) = \rho(z_i(J(q))) - J(q)\sigma(z_i(J(q)))$$

⁴Argomenti analoghi possono essere utilizzati nel caso generale.

$$\begin{aligned}
&= [\rho(z_i(q))I + \rho'(z_i(q))z'_i(q)H] - (qI + H) [\sigma(z_i(q)) + \sigma'(z_i(q))z'_i(q)H] \\
&= \underbrace{[\rho(z_i(q)) - q\sigma(z_i(q))]I}_{=0 \text{ per la (6.25)}} + \underbrace{\{[(\rho'(z_i(q)) - q\sigma'(z_i(q)))z'_i(q) - \sigma(z_i(q))]H + \sigma(z_i(q))z'_i(q)\}}_{=0 \text{ per la (6.26)}} \underbrace{H^2}_{=0} \\
&= O,
\end{aligned}$$

in cui si è sfruttato che $p = 2$ è l'indice di nilpotenza di H .

Analogamente al caso scalare, si dimostra il seguente risultato.

Teorema 6.3 *Se le radici $\{z_i(q)\}$ sono tutte distinte, allora ogni soluzione della (6.27) è della forma*

$$y_n = \sum_{i=1}^k Z_i^n c_i, \quad (6.31)$$

dove i solventi Z_i sono definiti dalla (6.30) ed i vettori $\{c_i\}$ sono indipendenti da n e univocamente determinati dalle condizioni iniziali $\{y_0, \dots, y_{k-1}\}$ per il metodo a k passi (ρ, σ) .

Come conseguenza, dalla (6.30) discende immediatamente il seguente risultato.

Corollario 6.1 *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. la soluzione (6.31) della equazione (6.27) è asintoticamente stabile;
2. $\rho(Z_i) < 1$, $i = 1, \dots, k$;
3. $|z_i(q)| < 1$, $i = 1, \dots, k$;
4. $q \in \mathcal{D}$, la regione di assoluta stabilità del metodo (ρ, σ) .

Osservazione 6.4 *Questo risultato continua a valere anche nel caso di radici multiple, generalizzando gli argomenti in modo del tutto analogo a quanto visto nel caso scalare (si veda la Sezione 3.2) cosa che, per brevità, omettiamo.*

A conclusione di questa sezione, possiamo quindi dire che l'analisi di stabilità lineare vista per i metodi LMF, basata sull'equazione test scalare (4.28), continua a valere nel caso di sistemi lineari autonomi aventi un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

6.5 Stabilità, condizionamento e *stiffness*

Nella precedente sezione, abbiamo visto che, per una corretta approssimazione numerica della soluzione del problema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad t \in [t_0, T], \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^s, \quad \sigma(\mathbf{A}) \equiv \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subset \mathbb{C}^-,$$

è necessario che tutti i prodotti

$$q_i = h\lambda_i, \quad i = 1, \dots, s,$$

dove al solito h è il passo di integrazione, siano contenuti nella regione di assoluta stabilità del metodo utilizzato. È evidente che, nel caso in cui si avesse

$$\min_i |\lambda_i| \ll \max_i |\lambda_i| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|} \gg 1, \quad (6.32)$$

questo potrebbe comportare severe restrizioni del passo h , nel caso in cui il metodo utilizzato abbia una regione di stabilità limitata (come nel caso dei metodi espliciti). Viceversa, non vi sono restrizioni nel caso in cui il metodo utilizzato sia A -stabile.

In genere, si è usi definire *stiff* un problema per il quale valga la (6.32). Tuttavia, questa definizione di *stiffness* di un problema non è molto precisa. Infatti, si supponga che sia abbia, ad esempio,

$$\frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|} \equiv \frac{|\lambda_s|}{|\lambda_1|} = \frac{10^9}{10^{-6}} = 10^{15}.$$

Pertanto, se si utilizzasse il metodo di Eulero esplicito, dovremmo utilizzare un passo $h \approx 10^{-9}$, che potremmo considerare *piccolo*. Tuttavia, la definizione di passo *piccolo* non può essere data in modo assoluto, nel senso che essa deve essere rapportata all'ampiezza $T - t_0$ dell'intervallo di integrazione: sarebbe corretto definire *stiff* questo problema nel caso in cui fosse $T - t_0 \gg 1$, ma non lo sarebbe nel caso in cui si avesse, ad esempio, $T - t_0 = 10^{-8}$. Infatti, in questo caso, con appena 10 passi del metodo di Eulero esplicito potremmo ottenere una approssimazione qualitativamente corretta. È pertanto evidente che la definizione (6.32) di *stiffness* debba essere migliorata, in modo da cogliere questo aspetto fondamentale del problema. Per chiarire questo punto, si consideri la solita equazione test (6.21). Se la condizione iniziale vale y_0 , allora la soluzione è data da:

$$y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Se questa viene perturbata di δy_0 , la soluzione subirà una perturbazione

$$\delta y(t) = \delta y_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Studiamo, quindi, il condizionamento di questo problema. Si ottiene, considerando una opportuna norma di funzioni:

$$\|\delta y\| \leq \|e^{\lambda(\cdot-t_0)}\| \cdot |\delta y_0|.$$

Chiaramente, $\|e^{\lambda(\cdot-t_0)}\|$ è il numero di condizionamento del problema, rispetto alla norma considerata. Una norma che va sicuramente considerata è quella infinito:

$$\|\delta y\|_\infty = \max_{t_0 \leq t \leq T} |\delta y(t)|,$$

e, denotando $\kappa = \|e^{\lambda(\cdot-t_0)}\|_\infty$, si ottiene

$$\|\delta y\|_\infty \leq \kappa |\delta y_0|.$$

Ha tuttavia anche senso considerare una sorta di media dell'errore, definita dalla seguente norma (si veda Figura 6.5):

$$\|\delta y\|_1 = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T |\delta y(t)| dt,$$

e, denotando $\gamma = \|e^{\lambda(\cdot-t_0)}\|_1$, si ottiene

$$\|\delta y\|_\infty \leq \gamma |\delta y_0|.$$

Chiaramente, per costruzione si ha: $0 < \gamma \leq \kappa$. Distinguiamo, in generale, i seguenti casi:

- $\kappa \simeq \gamma \simeq O(1)$: in tal caso il problema è ben condizionato in entrambe le norme;

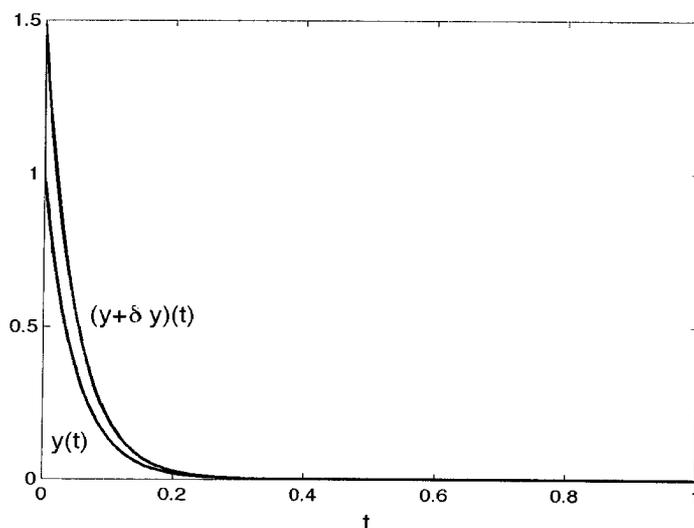


Figura 6.5: Norma 1 dell'errore.

- $\kappa \geq \gamma \gg 1$: in tal caso il problema è malcondizionato in entrambe le norme;
- $\kappa \gg \gamma \simeq O(1)$: in questo caso, il problema è malcondizionato in una norma ma ben condizionato nell'altra.

L'ultima tipologia di problema è quella che denomineremo *stiff*, ed il rapporto

$$\sigma = \frac{\kappa}{\gamma}$$

sarà detto *rapporto di stiffness*. Nel nostro caso, avendosi $\Re(\lambda) < 0$, si avrà (supponendo $T \gg t_0$):

$$\kappa = 1, \quad \gamma \gtrsim |\lambda|(T - t_0) \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx |\lambda|(T - t_0).$$

Nel caso in cui si abbia un sistema di equazioni lineari, con

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subset \mathbb{C}^-,$$

per ciascuno dei *modi* associati a ciascun autovalore, si ottiene un corrispondente *rapporto di stiffness*

$$\sigma_i = |\lambda_i|(T - t_0), \quad i = 1, \dots, s.$$

Il problema si dirà *stiff* se almeno uno di essi è grande.⁵ Supponiamo ora che

$$|\lambda_{\min}| = \min_i |\lambda_i|, \quad |\lambda_{\max}| = \max_i |\lambda_i|.$$

Pertanto, si avrà che il *rapporto di stiffness* del problema sarà dato da:

$$\sigma \equiv \max_i \sigma_i = |\lambda_{\max}|(T - t_0).$$

⁵Questa definizione, molto intuitiva, può essere generalizzata a tipologie più ampie di problemi.

In questo caso, se si volesse avere una informazione completa sulla dinamica, si dovrebbe integrare fino a che la componente più "lenta" (quella legata a λ_{\min}) non si è smorzata. A tal fine, dovrà aversi

$$T - t_0 \approx \frac{1}{|\lambda_{\min}|}$$

e, pertanto,

$$\sigma \approx \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|},$$

ottenendo, quindi, la definizione classica (vedi (6.32)). Se, tuttavia, si avesse

$$\frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \gg 1 \quad \text{ma} \quad |\lambda_{\max}|(T - t_0) \simeq O(1),$$

è doveroso sottolineare che il problema non sarebbe stiff.

6.6 Sistemi dinamici positivi

Importanza particolare assumono, nelle applicazioni, sistemi dinamici in cui la soluzione deve essere positiva. Si parla, in tal caso, di *sistemi dinamici positivi*. Esamineremo, nel seguito, il caso di sistemi dinamici positivi discreti e continui. A questo fine, introduciamo le seguenti notazioni valide per matrici (e vettori, in quanto particolari matrici). Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Diremo che:

- $A \neq O$, se esiste una coppia di indici (i, j) per cui $a_{ij} \neq 0$;
- $A \geq O$, se $a_{ij} \geq 0$, per ogni i, j . In tal caso, A si dirà *non negativa*;
- $A \succeq O$, se $A \geq O$ e $A \neq O$. In tal caso, A si dirà *positiva*;
- $A > O$, se $a_{ij} > 0$ per ogni i, j . In tal caso, A si dirà *strettamente positiva*.

Similmente, se B è un'altra matrice avente le stesse dimensioni di A , allora $A \geq B$ significa $A - B \geq O$ e, similmente, per le altre disuguaglianze.

Per matrici positive, vale il seguente risultato.

Teorema 6.4 (Perron-Frobenius) *Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A > O$. Allora $\exists \lambda_0 > 0$, $\mathbf{v}_0 > 0$ tali che:*

1. $A\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0$;
2. per ogni $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \lambda_0$, risulta $|\lambda| < \lambda_0$;
3. λ_0 è semplice.

Dimostrazione. Definiamo l'insieme:

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \mathbf{v} \succeq 0 \text{ t.c. } A\mathbf{v} \geq \lambda\mathbf{v}\}.$$

Osserviamo che:

- $\Lambda \neq \emptyset$. Infatti, $0 \in \Lambda$;

- Λ è limitato superiormente. Infatti, per ogni $\lambda \in \Lambda$ risulta:

$$\lambda \leq M \equiv \sum_{i,j} a_{ij},$$

poiché, se $\mathbf{x} = (x_i) \geq 0$, allora $(A\mathbf{x})_i \leq M \max_j x_j$.

Pertanto, esiste il massimo di Λ , sia esso λ_0 . Evidentemente, $\lambda_0 > 0$ e sia, inoltre, $\mathbf{v}_0 \geq 0$ tale che $A\mathbf{v}_0 \geq \lambda_0\mathbf{v}_0$. Per dimostrare il punto 1 della tesi, dobbiamo dimostrare che la disuguaglianza è, in realtà, un'uguaglianza e, inoltre, $\mathbf{v}_0 > 0$. Se, per assurdo, non fosse $A\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0$, allora si avrebbe

$$A\mathbf{v}_0 - \lambda_0\mathbf{v}_0 \geq 0$$

e, pertanto, essendo $A > O$:

$$A(A\mathbf{v}_0 - \lambda_0\mathbf{v}_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad A(A\mathbf{v}_0) > \lambda_0(A\mathbf{v}_0).$$

In tal caso, tuttavia, sarebbe possibile determinare $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che:

$$A(A\mathbf{v}_0) \geq (\lambda_0 + \varepsilon)(A\mathbf{v}_0).$$

Ovvero $\lambda_0 + \varepsilon \in \Lambda$, contraddicendo il fatto che $\lambda_0 = \max \Lambda$. Pertanto, dovrà aversi

$$A\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0.$$

Inoltre, sempre per il fatto che $A > O$, risulta:

$$\lambda_0\mathbf{v}_0 = A\mathbf{v}_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_0 > 0.$$

Per dimostrare il punto 2, si consideri un altro autovalore, sia esso λ , di A , $\lambda \neq \lambda_0$. Pertanto esisterà un vettore $\mathbf{v} = (v_i) \neq 0$ tale che $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Si consideri, ora, il vettore $\mathbf{x} = (|v_i|) \geq 0$. Pertanto, $A\mathbf{x} \geq |\lambda|\mathbf{x}$ e, quindi, $|\lambda| \in \Lambda$. Segue che $|\lambda| \leq \lambda_0$. Per dimostrare che la disuguaglianza è stretta, si consideri la matrice

$$A_\delta = A - \delta I,$$

dove $\delta > 0$ ma sufficientemente piccolo da avere ancora $A_\delta > O$. Poiché gli autovalori di A_δ sono quelli di A diminuiti di δ (e con gli stessi autovettori), segue che

$$|\lambda - \delta| \leq \lambda_0 - \delta.$$

Se fosse anche $|\lambda| = \lambda_0$, seguirebbe che $\Re(\lambda) \geq \lambda_0$, ovvero $\lambda = \lambda_0$, il che contraddice l'ipotesi $\lambda \neq \lambda_0$. Pertanto, dovrà aversi $|\lambda| < \lambda_0$.

Per dimostrare, infine, il punto 3, dimostriamo prima che λ_0 ha molteplicità geometrica uguale a 1 e, successivamente, che è semisemplice (e, pertanto, semplice poiché, in questo caso, molteplicità geometrica ed algebrica coincidono). Se, per assurdo, $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{x} \neq 0$ fosse un altro autovettore relativo a λ_0 , allora sarebbe possibile determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\mathbf{v}_0 + \alpha\mathbf{x} \geq 0 \quad \text{e, inoltre,} \quad (\mathbf{v}_0 + \alpha\mathbf{x})_k \equiv \min_i (\mathbf{v}_0 + \alpha\mathbf{x})_i = 0.$$

Questo è tuttavia assurdo, poiché

$$\lambda_0(\mathbf{v}_0 + \alpha\mathbf{x}) = A(\mathbf{v}_0 + \alpha\mathbf{x}) > 0.$$

Rimane da dimostrare che λ_0 è semisemplice. Se così non fosse, allora esisterebbe una catena di Jordan di lunghezza almeno 2 e, pertanto, un vettore \mathbf{x} tale che:

$$A\mathbf{x} = \lambda_0\mathbf{x} + \mathbf{v}_0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda_0 I)\mathbf{x} = \mathbf{v}_0.$$

Tuttavia, essendo $A^T > O$, esisterebbe $\mathbf{y}_0 > 0$ tale che $A^T\mathbf{y}_0 = \lambda_0\mathbf{y}_0$. Seguirebbe, pertanto, che

$$0 < \mathbf{y}_0^T \mathbf{v}_0 = \mathbf{y}_0^T (A - \lambda_0 I)\mathbf{x} = (\lambda_0 - \lambda_0)\mathbf{y}_0^T \mathbf{x} = 0,$$

il che è assurdo. Pertanto, l'autovalore deve essere semisemplice e, quindi, semplice. \square

Osservando che se

$$\lambda \in \sigma(A) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^i \in \sigma(A^i), \quad i \geq 0,$$

con stesso autovettore, è facile dimostrare il seguente risultato.

Corollario 6.2 *Se $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $A^k > 0$, allora valgono le stesse conclusioni del Teorema 6.4.*

Similmente, utilizzando gli stessi argomenti usati nella dimostrazione del Teorema 6.4, se ne dimostra la seguente versione debole.

Teorema 6.5 *Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \geq O$. Allora $\exists \lambda_0 \geq 0$, $\mathbf{v}_0 \geq 0$ tali che:*

1. $A\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0$;
2. per ogni $\lambda \in \sigma(A)$, risulta $|\lambda| \leq \lambda_0$.

L'autovalore $\lambda_0 \equiv \rho(A)$ dei precedenti risultati è detto *autovalore dominante* di A . Il corrispondente autovettore è detto *autovettore dominante*.

Per l'autovalore dominante di una matrice $A \geq 0$ valgono le seguenti limitazioni. Sia $\mathbf{v}_0 \geq 0$ l'autovettore dominante che supponiamo normalizzato in modo tale che

$$\mathbf{e}^T \mathbf{v}_0 = 1, \quad \mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T.$$

Pertanto

$$\lambda_0 = \mathbf{e}^T A \mathbf{v}_0 = (C_1, \dots, C_n) \mathbf{v}_0, \quad C_j = \sum_{i=1}^n a_{ij},$$

da cui

$$\min_j \sum_i a_{ij} \leq \lambda_0 \leq \max_j \sum_i a_{ij}. \quad (6.33)$$

Ripetendo un ragionamento analogo con A^T , si perviene a

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda_0 \leq \max_i \sum_j a_{ij}. \quad (6.34)$$

Alcuni esempi

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > O$ e $\lambda_0 = 2 = \rho(A)$. L'altro autovalore è $\lambda = 0$ che ha modulo minore di λ_0 .
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geq O$. Tuttavia $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > O$, cosicché si applica il Teorema di Perron Frobenius. Inoltre, dalle (6.33)-(6.34) segue che

$$1 \leq \lambda_0 \leq 2.$$

Infatti, risulta

$$\lambda_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618,$$

mentre l'altro autovalore è

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.618.$$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. In tal caso si ha: $A^{2i} = I$, $A^{2i-1} = A$, $i \geq 1$, e, quindi, si applica solo la forma debole del Teorema di Perron-Frobenius. Infatti, risulta $\lambda_0 = 1$ ma l'altro autovalore è $\lambda = -1$, avente lo stesso modulo.

6.6.1 Sistemi dinamici positivi discreti

Sia dato il sistema di equazioni alle differenze lineari autonomo

$$\mathbf{y}_{n+1} = A\mathbf{y}_n + \mathbf{b}, \quad n \geq n_0. \quad (6.35)$$

Se

$$A \geq O, \quad \mathbf{b} > 0, \quad (6.36)$$

parleremo di un *sistema dinamico positivo* (discreto). Il motivo di questa definizione discende dalla seguente ovvia proprietà.

Teorema 6.6 *Dato il sistema dinamico positivo (6.35)-(6.36), segue che*

$$\mathbf{y}_{n_0} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_n > 0, \quad n > n_0.$$

Chiaramente, se la matrice $(I - A)$ è nonsingolare, si avrà che

$$\bar{\mathbf{y}} = (I - A)^{-1}\mathbf{b} \quad (6.37)$$

è un punto di equilibrio per la (6.35). Per i sistemi dinamici positivi, vale il seguente importante risultato.

Teorema 6.7 *Esiste un punto di equilibrio $\bar{\mathbf{y}} > 0$ se e solo se $\rho(A) < 1$.*

Dimostrazione. Se $\rho(A) < 1$, la matrice $(I - A)$ è nonsingolare e, inoltre,

$$\bar{\mathbf{y}} = (I - A)^{-1}\mathbf{b} = \sum_{i \geq 0} A^i \mathbf{b} > 0.$$

Viceversa, se $\exists \bar{\mathbf{y}} > 0$ tale che

$$(I - A)\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{b},$$

allora, detto $\mathbf{u}_0 \geq 0$ l'autovettore di A^T relativo all'autovalore dominante $\lambda_0 = \rho(A)$, si ha:

$$\mathbf{u}_0^T (I - A)\bar{\mathbf{y}} = (1 - \lambda_0)\mathbf{u}_0^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{u}_0^T \mathbf{b} > 0.$$

Essendo $\mathbf{u}_0^T \bar{\mathbf{y}} > 0$, segue quindi che $1 > \rho(A)$. Da questo segue anche che $\bar{\mathbf{y}}$ è unico (è infatti dato dalla (6.37)). \square

In altri termini, per un sistema dinamico positivo discreto, l'esistenza di un punto di equilibrio a componenti positive equivale alla sua asintotica stabilità.

Il modello di Leslie

Questo modello descrive l'assetto demografico di una popolazione di individui omogenea, strutturandola in classi di età. Sia dunque L la età massima di sopravvivenza di un individuo. Si suddivide, quindi, questo arco temporale in m sottointervalli di ampiezza

$$\tau = L/m.$$

Questa ampiezza temporale sarà assunta come unità di tempo discreta. Pertanto, denotiamo con

$$x_i(k), \quad i = 1, \dots, m,$$

il numero di individui di età compresa tra $[(i-1)\tau, i\tau[$, $i = 1, \dots, m$, e cerchiamo di descrivere la loro dinamica temporale. Chiaramente, si avrà:

$$x_{i+1}(k+1) = \beta_i x_i(k), \quad i = 1, \dots, m-1,$$

dove

$$0 < \beta_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, m-1,$$

è il *coefficiente di sopravvivenza* degli individui della classe i -esima nel periodo di tempo τ . La prima classe di età conterrà, invece, tutti i nuovi nati:

$$x_1(k+1) = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i(k),$$

dove gli $\alpha_i \geq 0$ sono i *coefficienti di natalità* delle rispettive classi di età. Pertanto, si ottiene il seguente sistema dinamico discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) \equiv \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_m(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ \beta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \beta_{m-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \end{pmatrix} \equiv A\mathbf{x}(k), \quad k \geq 0.$$

Si verifica facilmente che

$$\mathbf{x}(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(k) > 0, \quad k \geq 0.$$

Osserviamo che $A \succeq O$ e, pertanto, esisterà un autovalore dominante $\lambda_0 \geq 0$. Ai fini di una analisi più approfondita, sarà utile trasformare per similitudine la matrice A come segue:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 & \dots & \hat{\alpha}_{m-1} & \hat{\alpha}_m \\ 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \equiv T^{-1}AT, \quad (6.38)$$

con

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \beta_1 & & \\ & & \beta_1\beta_2 & \\ & & & \dots \\ & & & & \prod_{j=1}^{m-1} \beta_j \end{pmatrix}.$$

Infatti, la matrice \hat{A} è una matrice di Frobenius, il cui polinomio caratteristico è dato da

$$p(\lambda) = \lambda^m - \sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i \lambda^{m-i}. \quad (6.39)$$

Osserviamo che

$$\alpha_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\alpha}_i \equiv \alpha_i \prod_{j=1}^{i-1} \beta_j = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato.

Teorema 6.8 *Se $\exists \alpha_i > 0$, allora $\lambda_0 > 0$ e l'autovettore dominante della matrice A ha componenti tutte positive.*

Dimostrazione. Se esiste almeno un coefficiente $\alpha_i \neq 0$ allora il polinomio (6.39) avrà almeno una radice non nulla e, pertanto, una positiva di modulo massimo. Per dimostrare che il corrispondente autovettore dominante ha componenti tutte positive, consideriamo la matrice trasformata \hat{A} in (6.38), in quanto la matrice di trasformazione T è diagonale a componenti positive. Sia dunque $\mathbf{v} = (v_i) \succeq 0$ tale che

$$\hat{A}\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}.$$

Pertanto, si ha

$$v_i = \lambda_0 v_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1,$$

e quindi $\mathbf{v} > 0$ (l'alternativa sarebbe $\mathbf{v} = 0$, che non è ammissibile). \square

Pertanto, se λ_0 è semplice e non vi sono altre radici di modulo uguale, avremo che la dinamica di allineerà nella direzione dell'autovettore dominante. Questo implica che la percentuale di individui in ciascuna classe di età rimane costante. Infatti, detto \mathbf{v} l'autovettore dominante, si avrà,

$$\mathbf{x}(k) \approx c\lambda_0^k \mathbf{v}, \quad k \gg 0$$

e, pertanto,

$$x_i(k) \approx \frac{v_i}{\|\mathbf{v}\|_1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Il seguente risultato garantisce che questo avvenga.

Teorema 6.9 (Ostrowski) *Se il massimo comun divisore degli indici degli elementi α_i positivi è uguale a 1, allora esiste una radice semplice e positiva, λ_0 , di $p(\lambda)$ che maggiore in modulo tutte le altre radici.*

Corollario 6.3 *Se esistono due coefficienti consecutivi α_i positivi, allora il Teorema di Ostrowski vale.*

Il caso più sfavorevole, dal punto di vista della dinamica, è quello in cui uno solo dei coefficienti α_i è diverso da zero, mentre gli altri sono tutti nulli. Supponiamo, per semplicità, che sia $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, m-1$, e $\alpha_m > 0$. In questo caso, gli autovalori sono (a meno del modulo) le radici m -esime dell'unità e, pertanto, avremo la sovrapposizione di moti periodici che portano al cosiddetto fenomeno delle *ondate di popolazione*, talora effettivamente osservato nella realtà.

Il calcolo del *pagerank* di Google

Google è un motore di ricerca per *Internet*, sviluppato da Larry Page e Sergey Brin, quando erano studenti all'Università di Stanford. Essi, dopo aver sviluppato la teoria secondo cui un motore di ricerca basato sull'analisi matematica delle relazioni tra siti *web* avrebbe prodotto risultati migliori rispetto alle tecniche empiriche usate precedentemente, fondarono la *Google Inc.* nel 1998. Come vedremo, questa teoria si basa sull'applicazione dei risultati precedentemente studiati sulle matrici positive.

Lo strumento essenziale per poter fare efficientemente ricerche su *Internet* è l'ordinamento dei siti in base alla loro importanza: esso è denominato *pagerank*. A tal fine, il principio al quale Page e Brin si sono ispirati è il seguente:

“una pagina è importante se è referenziata da tante pagine importanti.”

Un interessante modello che rispecchia questo principio è quello del *random surfer* che, partendo da un sito o pagina (*url*⁶) a caso segue, successivamente, un *link* a caso tra quelli che si trovano sulla pagina corrente. Proseguendo questo processo all'infinito, l'importanza di ciascuna pagina corrisponde alla frazione del tempo spesa all'interno della pagina stessa. Se ora pensiamo al *web* come ad un grafo orientato, $W = \langle V, E \rangle$, nel quale V è l'insieme dei nodi (che identificano le pagine *web* o *url*) con $|V| = n$ il numero degli stessi, ed E è l'insieme degli archi (che rappresentano i *link*) tra le pagine, il precedente modello porta a definire l'importanza della pagina i come:

$$x_i = \sum_{(j \rightarrow i) \in E} \frac{x_j}{f_j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.40)$$

dove $(j \rightarrow i)$ denota il link che dalla pagina j punta alla pagina i , mentre f_j è il numero di *link* uscenti dalla pagina j . Formalmente, se definiamo la matrice⁷

$$L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (j \rightarrow i) \in E, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

⁶ Acronimo di *uniform resource locator*, ovvero l'indirizzo *Internet* del sito *web*.

⁷ Si tratta della trasposta della cosiddetta *matrice di adiacenza* del grafo W .

allora

$$f_j = \sum_{i=1}^n l_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Pertanto, definendo la matrice

$$H = LF, \quad (6.41)$$

con

$$F = \begin{pmatrix} f_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & f_n^+ \end{pmatrix}, \quad f_i^+ = \begin{cases} f_i^{-1}, & \text{se } f_i > 0, \\ 0, & \text{se } f_i = 0, \end{cases} \quad (6.42)$$

e definendo il vettore del *pagerank* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, (6.40) può essere riformulata come

$$\mathbf{x} = H\mathbf{x}, \quad (6.43)$$

ovvero \mathbf{x} è l'autovettore destro di H relativo all'autovalore $\lambda = 1$.

Tuttavia, il modello (6.43) è incompleto perchè molte pagine sono senza *link* in uscita, per cui, se il *random surfer* entrasse in una di queste, non ne uscirebbe più. Da un punto di vista algebrico, questo significa che $\lambda = 1$ potrebbe non essere un autovalore di A . Per ovviare a questo problema, si ipotizza che quando il *random surfer* entra in una pagina senza *link* in uscita, allora salta casualmente ad una pagina qualunque del *web*. Algebricamente, questo si traduce nel richiedere che

$$\mathbf{x} = (H + \mathbf{v}\mathbf{d}^T)\mathbf{x} \equiv S\mathbf{x}, \quad (6.44)$$

dove

$$\mathbf{v} = \frac{1}{n}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (6.45)$$

e (vedi (6.42))

$$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)^T, \quad d_i = 1 - f_i f_i^+ = \begin{cases} 1, & \text{se } f_i = 0, \\ 0, & \text{se } f_i > 0. \end{cases}$$

Teorema 6.10 *La matrice S definita in (6.44) soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $S \succeq O$;
2. $\mathbf{e}^T S = \mathbf{e}^T$;
3. $\lambda = 1$ è il raggio spettrale di S .

Dimostrazione. La dimostrazione dei primi due punti è immediata. Riguardo all'ultimo punto, osserviamo che dal secondo segue che $\lambda = 1$ è autovalore di S^T e, quindi, di S . Osservando che $\rho(S) \leq \|S\|$ per ogni norma indotta su matrice, la tesi si completa in virtù del punto 1, da cui si ottiene: $1 = \|\mathbf{e}^T S\|_\infty = \|S\|_1$. \square

A questo punto, osserviamo che affinché il *pagerank* (6.44) abbia un significato fisico, è necessario che esso abbia componenti positive e, utilizzando la normalizzazione

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1, \quad (6.46)$$

sia, inoltre, unico. Questo discenderebbe dal Teorema di Perron-Frobenius 6.4, nel caso in cui $S > O$. Al fine di garantire il soddisfacimento di questo requisito, si modifica il problema (6.44) come segue. Per un dato $p \in (0, 1)$, ricercheremo (vedi (6.45))

$$\mathbf{x} = S(p)\mathbf{x} \equiv (pS + (1-p)\mathbf{v}\mathbf{e}^T)\mathbf{x}. \quad (6.47)$$

Praticamente, questo significa che, arrivato in una data pagina, il *random surfer* sceglie la pagina successiva come descritto in precedenza, con probabilità p , ovvero saltando a caso su una qualunque pagina del *web*, con probabilità $(1-p)$. Chiaramente, per $p = 1$ ritorniamo al caso precedente ma, se $p \neq 1$, otteniamo che $S(p) > O$, essendo $\mathbf{v}\mathbf{e}^T > O$. Infatti, quest'ultima matrice ha elementi tutti uguali a $1/n$. In tal modo, le ipotesi del Teorema 6.4 sono soddisfatte e, quindi, l'esistenza ed unicità del vettore \mathbf{x} , a componenti positive, è garantita. Inoltre, ancora una volta si avrà (vedi (6.45) e Teorema 6.10),

$$\|S(p)\|_1 = \|\mathbf{e}^T S(p)\|_\infty = 1, \quad p \in (0, 1). \quad (6.48)$$

Osservazione 6.5 *Chiaramente, più p in (6.48) è prossimo a 1, tanto più $S(p)$ sarà una fedele modellizzazione del web.*

Per il calcolo del *Google pagerank* (6.47) è possibile utilizzare una versione semplificata del *metodo delle potenze* per la ricerca dell'autovalore dominante. Infatti, partendo da un vettore \mathbf{x}_0 tale che

$$\mathbf{x}_0 > 0, \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x}_0 = \|\mathbf{x}_0\|_1 = 1,$$

si esegue l'iterazione

$$\mathbf{x}_k = S(p)\mathbf{x}_{k-1}, \quad k \geq 1. \quad (6.49)$$

Si dimostra facilmente per induzione che, in virtù della (6.48):

$$\mathbf{x}_k > 0, \quad \|\mathbf{x}_k\|_1 = \mathbf{e}^T S(p)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{e}^T \mathbf{x}_{k-1} = \|\mathbf{x}_{k-1}\|_1 = 1, \quad k \geq 1.$$

Vale inoltre il seguente risultato.

Teorema 6.11 $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$ per $k \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{x}_k\}$ la successione generata dall'iterazione (6.49). Dalla (6.47), tenendo conto della (6.46) e del fatto che

$$\mathbf{e}^T(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) = 0,$$

si ottiene che, per $0 < p < 1$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|_1 &= \|S(p)(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x})\|_1 = \|pS(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x})\|_1 \\ &\leq p\|S\|_1 \cdot \|\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}\|_1 = p\|\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}\|_1 \\ &\leq p^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\|_1 \leq 2p^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 6.6 *Dalla dimostrazione del precedente teorema, discende anche un criterio di arresto per l'iterazione (6.49). Infatti, per ottenere un'accuratezza $2tol$, sarà necessario un numero massimo di $\lceil \log tol / \log p \rceil$ iterazioni.*

Da questo si evince come, sebbene valori di p più prossimi a 1 diano una riproduzione "più fedele" del web, nondimeno questo peggiora le proprietà di convergenza del metodo delle potenze. Studi in proposito, indicano in $p = 0.85$ un buon compromesso tra accuratezza ed efficienza.

6.6.2 Sistemi dinamici positivi continui

Nel caso continuo, un sistema dinamico positivo è, nel caso lineare, della forma

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad (6.50)$$

con

$$\mathbf{b} > 0, \quad A = B - cI, \quad \text{con } B = (b_{ij}) \geq O \text{ e } c > 0. \quad (6.51)$$

Una matrice nella forma precedente è detta *matrice di Metzler*. Vale, infatti, il seguente risultato.

Teorema 6.12 *Sia dato il sistema dinamico positivo (6.50)-(6.51). Allora*

$$\mathbf{y}_0 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}(t) > 0, \quad \forall t > 0.$$

Dimostrazione. Infatti, supponendo che si abbia $\mathbf{y}(t) \geq 0$, con $y_i(t) = 0$, si avrebbe

$$y_i'(t) = \underbrace{\sum_{j \neq i} b_{ij} y_j(t)}_{\geq 0} + \underbrace{b_i}_{> 0} > 0. \quad \square$$

Poiché $B \geq O$, segue che $\exists \lambda_0 \in \sigma(B)$ tale che $\lambda_0 = \rho(B)$. Nel caso in cui fosse $c > \lambda_0$, allora la matrice A sarebbe nonsingolare, e la (6.50) ammetterebbe il punto di equilibrio

$$\bar{\mathbf{y}} = -A^{-1}\mathbf{b} = (cI - B)^{-1}\mathbf{b}. \quad (6.52)$$

Chiaramente, avendosi

$$\lambda \in \sigma(B) \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \lambda - c \in \sigma(A),$$

segue che $\Re(\mu) \leq \lambda_0 - c < 0$ e, pertanto, il punto di equilibrio (6.52) è asintoticamente stabile. Analogamente al caso discreto, vale il seguente risultato.

Teorema 6.13 *Esiste un punto di equilibrio $\bar{\mathbf{y}} > 0$ se e solo se $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$.*

Dimostrazione. Se $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$, allora dovrà aversi $c > \lambda_0 = \rho(B)$ e pertanto, dalla (6.52) segue che:

$$\bar{\mathbf{y}} = (cI - B)^{-1}\mathbf{b} = c^{-1} \sum_{n \geq 0} (c^{-1}B)^n \mathbf{b} > 0,$$

in quanto $\mathbf{b} > 0$, $c^{-1}B \geq O$, e $\rho(c^{-1}B) < 1$.

Viceversa, se esistesse $\bar{\mathbf{y}} > 0$ tale che

$$A\bar{\mathbf{y}} \equiv (cI - B)\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{b} > 0,$$

allora, detto $\mathbf{u}_0 \geq 0$ il vettore tale che $B^T \mathbf{u}_0 = \lambda_0 \mathbf{u}_0$, si avrebbe:

$$\mathbf{u}_0^T (cI - B)\bar{\mathbf{y}} = (c - \lambda_0) \mathbf{u}_0^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{u}_0^T \mathbf{b} > 0.$$

Essendo $\mathbf{u}_0^T \bar{\mathbf{y}} > 0$, segue quindi che $c > \lambda_0 = \rho(B)$ e, pertanto, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$. Inoltre, il punto di equilibrio risulta essere unico (in quanto dato dalla (6.52)). \square

Analogamente al caso discreto, anche per un sistema dinamico positivo continuo, l'esistenza di un punto di equilibrio a componenti positive equivale alla sua asintotica stabilità.

Definizione 6.2 Una matrice del tipo

$$M = cI - B, \quad B \geq O, \quad c > \rho(B),$$

è detta *M*-matrice.

Verificare, per esercizio, le seguenti proprietà di una *M*-matrice:

- $M^{-1} \geq O$;
- $(M)_{ij} \leq 0$, se $i \neq j$;
- $(M)_{ii} > 0$.

Osservazione 6.7 Le matrici con inversa non negativa sono dette matrici monotone. Esse sono utili nella risoluzione di disequazioni lineari. Infatti, se

$$Ax \leq b,$$

ed *A* è una matrice monotona, allora

$$x \leq A^{-1}b.$$

Inoltre, se *A* e *B* sono monotone, con $A \leq B$, allora $B^{-1} \leq A^{-1}$.

Le *M*-matrici sono, pertanto, particolari matrici monotone.

Modello di corsa agli armamenti

In questo caso, si formula un modello a tempo continuo che descrive il livello di armamenti tra due nazioni in competizione. Siano, dunque, $x(t)$ e $y(t)$ i livelli di armamento delle due nazioni. Esso fu formulato originariamente dal matematico inglese L.F. Richardson, che lo generalizzò anche al caso di più nazioni. In dettaglio, si avrà:

$$x'(t) = -ax(t) + by(t) + \xi_0, \quad y'(t) = cx(t) - dy(t) + \eta_0,$$

dove tutti i coefficienti sono positivi, *a, c* sono i coefficienti di *affaticamento* e *b, d* coefficienti di *competizione*. Infine, i livelli “basali” $\xi_0, \eta_0 > 0$ sono spesso dipendenti dalle connotazioni culturali delle popolazioni. In termini vettoriali, si ottiene un sistema dinamico positivo continuo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}.$$

Esisterà un punto di equilibrio asintoticamente stabile e positivo se e solo se la matrice dei coefficienti, sia essa *A*, ha autovalori a parte reale negativa (diversamente, si scatenerà un conflitto). Poiché la traccia di *A* vale $\lambda_1 + \lambda_2 = -(a + d) < 0$ i due autovalori avranno parte reale negativa se e solo se $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$, ovvero se

$$ad > bc.$$

Dal punto fisico, questo significa che il prodotto dei coefficienti di affaticamento dovrà essere maggiore dei coefficienti di competizione. In questo caso, il punto di equilibrio (che è asintoticamente stabile) per il livello di armamenti si vede essere dato da:

$$\bar{x} = \frac{d\xi_0 + b\eta_0}{ab - cd}, \quad \bar{y} = \frac{c\xi_0 + a\eta_0}{ab - cd}.$$