

## Capitolo 4

# Metodi lineari multistep

Occupiamoci, ora, della risoluzione numerica di problemi ai valori iniziali per equazioni differenziali ordinarie:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y_0. \quad (4.1)$$

Assumeremo che la funzione  $f$  soddisfi le usuali condizioni di continuità e Lipschitzianità rispetto alla  $y$ , ed assumeremo che la soluzione del problema (4.1) esista e sia unica. Dal punto di vista concettuale, la risoluzione numerica del problema (4.1) avviene in tre fasi distinte:

1. definizione di un dominio discreto  $\{t_n\}$ ;
2. definizione di un problema discreto definito su tale dominio;
3. risoluzione del problema discreto.

Per quanto riguarda il primo punto, definiremo un dominio discreto assai semplice:

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, \dots, N, \quad h = \frac{T - t_0}{N}. \quad (4.2)$$

Il parametro  $h > 0$  è usualmente denominato *passo di discretizzazione* (o *integrazione*) o, più semplicemente, *passo*.

Per quanto riguarda il secondo punto considereremo, definendo  $y_n$  la approssimazione a  $y(t_n)$  e

$$f_n \equiv f(t_n, y_n), \quad (4.3)$$

problemi discreti nella forma:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i}, \quad n = 0, \dots, N - k, \quad (4.4)$$

dove i coefficienti  $\{\alpha_i\}$  e  $\{\beta_i\}$  definiscono il metodo, in cui si supporranno assegnate le *condizioni iniziali*

$$y_0, \dots, y_{k-1}. \quad (4.5)$$

La (4.4) definisce un *metodo lineare multistep*, o *linear multistep formula (LMF)*, a  $k$  passi. In altri termini, approssimiamo il problema *continuo* ai valori iniziali del primo ordine (4.1) con un problema *discreto* ai valori iniziali di ordine  $k$ .

Per quanto riguarda il terzo punto, osserviamo che la (4.4) è definita a meno di una costante moltiplicativa nonnulla. Questa può essere determinata, imponendo la normalizzazione di un coefficiente. Nel nostro caso, imponremo la normalizzazione

$$\alpha_k = 1. \quad (4.6)$$

Pertanto, la (4.4) può essere riscritta come

$$y_{n+k} - h\beta_k f_{n+k} = - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i f_{n+i}, \quad n = 0, \dots, N - k. \quad (4.7)$$

È evidente che, note le  $k$  condizioni iniziali (4.5), si determineranno  $y_k, y_{k+1}, \dots$ , dalla (4.7). In particolare, se  $\beta_k = 0$ , la (4.7) diviene:

$$y_{n+k} = - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i f_{n+i}, \quad n = 0, \dots, N - k.$$

Ovvero, si ottiene la nuova approssimazione direttamente mediante delle semplici sostituzioni in avanti. In tal caso, il metodo si dice *esplicito*.

Diversamente, ricordando la definizione (4.3) di  $f_n, y_n$  si otterrà dalla (4.7) risolvendo, ad ogni passo, un'equazione (generalmente) nonlineare. In questo caso, il metodo si dice *implicito*. È evidente che l'implementazione di un metodo esplicito è assai più semplice di uno implicito.

Concludiamo questa sezione definendo i seguenti polinomi:

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^k \alpha_i z^i, \quad \sigma(z) = \sum_{i=0}^k \beta_i z^i, \quad (4.8)$$

denominati *primo* e *secondo polinomio caratteristico* associati al metodo LMF (4.4). In questo modo, quest'ultimo può essere rappresentato sinteticamente come:

$$\rho(E)y_n - h\sigma(E)f_n = 0, \quad n = 0, \dots, N - k, \quad (4.9)$$

dove  $E$  è, al solito, l'operatore di *shift*. Poiché i due polinomi in (4.8) caratterizzano il dato metodo LMF, talora faremo riferimento a quest'ultimo come al *metodo*  $(\rho, \sigma)$ .

## 4.1 Ordine di un metodo LMF

In generale, la soluzione della (4.4) differirà da quella del problema continuo (4.1) (chiaramente, proiettata sulla mesh (4.2)). È tuttavia lecito richiedere che i due problemi siano *vicini* nel seguente senso: sia assegnata la soluzione esatta  $y(t)$  valutata ai nodi della mesh (4.2),  $\{y(t_n)\}$ , e denotiamo con

$$\hat{f}_n \equiv f(t_n, y(t_n)). \quad (4.10)$$

Diremo che il metodo ha *ordine*  $p$  se

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y(t_{n+i}) - h \sum_{i=0}^k \beta_i \hat{f}_{n+i} \equiv \tau_n = O(h^{p+1}), \quad n = 0, \dots, N - k, \quad (4.11)$$

dove  $\tau_n$  è detto *errore locale di troncamento*. In particolare, il metodo si dirà *consistente* se  $p \geq 1$ . In altri termini, si richiede che il *residuo* ottenuto inserendo la soluzione continua  $\{y(t_n)\}$  nell'equazione discreta sia un infinitesimo di opportuno ordine del passo  $h$ .

L'ordine di un metodo LMF si traduce in condizioni algebriche sui suoi coefficienti, che andiamo ora ad esaminare. A questo fine, supporremo che  $y(t)$  sia, per semplicità di esposizione, analitica. In tal caso, dalla (4.11) si ottiene, tenendo conto della (4.2):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^k \alpha_i y(t_{n+i}) - h \sum_{i=0}^k \beta_i \hat{f}_{n+i} \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_i y(t_{n+i}) - h \sum_{i=0}^k \beta_i y'(t_{n+i}) \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_i \sum_{j \geq 0} \frac{y^{(j)}(t_n)}{j!} i^j h^j - \sum_{i=0}^k \beta_i \sum_{j \geq 1} \frac{y^{(j)}(t_n)}{(j-1)!} i^{j-1} h^j \\ &= y(t_n) \sum_{i=0}^k \alpha_i + \sum_{j \geq 1} \frac{y^{(j)}(t_n)}{j!} h^j \sum_{i=0}^k (i^j \alpha_i - j i^{j-1} \beta_i). \end{aligned}$$

Imponendo che le potenze di  $h^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, p$ , si annullino, si ottengono le condizioni per l'ordine  $p$ :

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^k (i^j \alpha_i - j i^{j-1} \beta_i) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (4.12)$$

In particolare, le condizioni di consistenza sono date da:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^k (i \alpha_i - \beta_i) = 0. \quad (4.13)$$

Quest'ultime possono essere riscritte, tenendo conto dei polinomi (4.8), come:

$$\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1). \quad (4.14)$$

Vale il seguente risultato.

**Teorema 4.1** *L'ordine massimo di un LMF a  $k$  passi è  $2k$ , se il metodo è implicito, o  $2k-1$ , se il metodo è esplicito.*

Dimostrazione. In virtù delle (4.13), i coefficienti di un metodo di ordine  $p$  soddisferanno l'equazione

$$M_p \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

in cui

$$M_p = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & k & 1 & \dots & 1 \\ 0^2 & \dots & k^2 & 2 \cdot 0 & \dots & 2 \cdot k \\ \vdots & & \vdots & 3 \cdot 0^2 & \dots & 3 \cdot k^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0^p & \dots & k^p & p \cdot 0^{p-1} & \dots & p \cdot k^{p-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (2k+2)}.$$

La tesi discende quindi dal fatto che  $M_p$  ha sempre rango massimo e, pertanto,  $p \leq 2k$ , se il metodo è implicito, avendo fissato la normalizzazione (4.6). Se il metodo è esplicito, invece,  $p \leq 2k - 1$ , perchè dovrà anche valere  $\beta_k = 0$ .  $\square$

## 4.2 Convergenza

Osservando che la soluzione discreta  $\{y_n\}$  soddisfa la (4.4), mentre la soluzione del problema (4.1), proiettata sulla *mesh* (4.2),  $\{y(t_n)\}$ , soddisfa la (4.11), è naturale richiedere che la prima *converga* alla seconda, quando  $N \rightarrow \infty$ . Per questo motivo, si dirà che il metodo (4.4) è *convergente* se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{n=0, \dots, N} \|e_n\| = 0, \quad e_n = y(t_n) - y_n.$$

Osserviamo che se  $N \rightarrow \infty$ , allora:

$$h = \frac{T - t_0}{N} \rightarrow 0. \quad (4.15)$$

Pertanto, l'equazione dell'errore, ottenuta sottraendo la (4.4) dalla (4.11) è:

$$\rho(E)e_n - h\sigma(E)(\hat{f}_n - f_n) = \tau_n, \quad n = 0, \dots, N - k. \quad (4.16)$$

Poichè  $h \rightarrow 0$  e  $\tau_n = O(h^{p+1})$ ,  $p \geq 1$ , ha senso studiare la stabilità della soluzione nulla dell'equazione

$$\rho(E)e_n = 0, \quad n = 0, \dots, N - k. \quad (4.17)$$

Questa si ottiene direttamente applicando il metodo (4.4) all'equazione  $y' = 0$ , la cui soluzione è costante. Osserviamo che  $\rho(z)$  non può essere un polinomio di Schur, a causa della proprietà di consistenza (4.14).<sup>1</sup> Può tuttavia essere un polinomio di Von Neumann, il che garantisce la stabilità della soluzione nulla per la (4.17). In tal caso, il metodo  $(\rho, \sigma)$  si dirà *0-stabile*.

La proprietà di 0-stabilità è importante, in quanto è possibile dimostrare il seguente risultato.

**Teorema 4.2** *Sia  $f \in C^{(p+1)}$  ed il metodo  $(\rho, \sigma)$  0-stabile. Se*

- $\tau_n = O(h^{p+1}) \quad n = 0, \dots, N - k$ , e
- $e_i = O(h^r), \quad i = 0, \dots, k - 1$ ,

*allora:*

$$e_n = O(h^{\min(r,p)}), \quad n = k, \dots, N.$$

<sup>1</sup>Se così non fosse, si avrebbe  $\tau_n = O(h^0)$ .

In altre parole, se un metodo è 0-stabile e di ordine  $p$ , e le condizioni iniziali hanno accuratezza  $O(h^p)$ , allora l'errore globale  $e_n$  sarà a sua volta  $O(h^p)$ . Come semplice corollario, si ottiene il seguente risultato.

**Corollario 4.1** *Un metodo LMF che sia consistente e 0-stabile è convergente.*

**Osservazione 4.1** *Evidentemente, il problema continuo (4.1) fornisce solo la condizione iniziale  $y_0$ . Le altre condizioni iniziali (4.5) possono essere approssimate, entro l'accuratezza desiderata, ad esempio mediante sviluppi in serie in  $t = t_0$ .*

La 0-stabilità è, in virtù del Teorema 4.2, una proprietà essenziale per un metodo LMF. Tuttavia è altresì evidente che richiedere che il polinomio  $\rho(z)$  associato ad un metodo sia un polinomio di Von Neumann, introduce dei vincoli sui suoi coefficienti che, pertanto, non potranno essere utilizzati per incrementare l'ordine del metodo. Questo argomento, che abbiamo esposto in modo intuitivo, si formalizza in realtà come segue.

**Teorema 4.3 (prima barriera di Dahlquist)** *L'ordine massimo di un metodo LMF a  $k$  passi che sia 0-stabile è:*

- $k + 1$ , se  $k$  è dispari;
- $k + 2$ , se  $k$  è pari.

### 4.3 Alcuni esempi di metodi LMF convergenti

Esaminiamo, in questa sezione, alcune classi di metodi che risultano essere 0-stabili e consistenti e, pertanto, convergenti.

#### I metodi di Adams

Per questi metodi, il polinomio  $\rho(z)$  è della forma

$$\rho(z) = z^{k-1}(z - 1).$$

Pertanto esso ha  $k - 1$  radici nello 0 ed una uguale ad 1. Il metodo è perciò 0-stabile per costruzione. I coefficienti del polinomio  $\sigma(z)$  sono scelti in modo da ottenere l'ordine massimo, distinguendo, tuttavia, tra i metodi espliciti e quelli impliciti.

I metodi di *Adams-Bashforth* sono espliciti (e pertanto  $\beta_k = 0$ ): essi hanno ordine  $p = k$ . Vediamone alcuni.

- $k = 1$ : si ottiene il *metodo di Eulero esplicito*, che ha ordine 1,

$$y_{n+1} - y_n = hf_n. \quad (4.18)$$

- $k = 2$ : si ottiene il *metodo di Adams-Bashforth* di ordine 2,

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n). \quad (4.19)$$

I metodi di *Adams-Moulton* sono impliciti ed hanno ordine  $p = k + 1$ . Vediamone alcuni esempi.

- $k = 1$ : si ottiene il *metodo dei trapezi*, che ha ordine 2,

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2} (f_{n+1} + f_n). \quad (4.20)$$

- $k = 2$ : si ottiene il *metodo di Adams-Moulton* di ordine 3,

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12} (5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n). \quad (4.21)$$

### Formule di Newton-Cotes

Queste formule si ottengono approssimando il teorema fondamentale del calcolo mediante una formula di quadratura. Esse sono del tipo:

$$y_{n+k} - y_n = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i}. \quad (4.22)$$

Il polinomio  $\rho(z) = z^k - 1$  è, quindi, un polinomio di Von Neumann, essendo le sue radici le radici  $k$ -esime dell'unità. Se il metodo ha almeno ordine 1 sarà, dunque, convergente.

Per  $k = 1$  si ottiene la formula dei trapezi vista innanzi. Per  $k = 2$  si ottiene il *metodo di Simpson*

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3} (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n), \quad (4.23)$$

che è implicito e si verifica avere ordine 4. Se si utilizza la regola dei rettangoli, si ottiene invece il *metodo del mid-point*:

$$y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}, \quad (4.24)$$

che è esplicito ed ha ordine 2.

### Backward Differentiation Formulae (BDF)

Questi metodi sono nella forma:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h\beta_k f_{n+k}, \quad (4.25)$$

con i coefficienti  $\{\alpha_i\}$  univocamente determinati dall'imporre l'ordine massimo  $p = k$ . Questi metodi risultano essere impliciti; sono, inoltre, 0-stabili fino a  $k = 6$ . Vediamone alcuni:

- $k = 1$ : si ottiene il *metodo di Eulero implicito*,

$$y_{n+1} - y_n = hf_{n+1}, \quad (4.26)$$

che ha ordine 1.

- $k = 2$ : si ottiene la *BDF di ordine 2*,

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf_{n+2}, \quad (4.27)$$

che si verifica essere 0-stabile, in quanto  $\rho(z) = (z - 1)(z - \frac{1}{3})$ .

## 4.4 Stabilità per $h$ fissato

Nonostante il risultato negativo dato dalla prima barriera di Dahlquist, abbiamo visto che esistono metodi 0-stabili con un ordine di accuratezza arbitrariamente elevato (e, pertanto, convergenti). Nell'analisi su cui si basa la proprietà di 0-stabilità, tuttavia, si è assunto di poter far tendere il passo  $h$  a 0, aumentando il numero  $N$  dei punti della *mesh*. Tuttavia, per alcuni problemi,  $T \rightarrow \infty$ . Questo significa che, anche facendo tendere  $N$  a  $\infty$ , non è più possibile assumere il passo  $h$  infinitesimo.<sup>2</sup> Ci troviamo, pertanto, a dover discutere l'equazione dell'errore (4.16) per  $h$  fissato. Questo è, in generale, un compito assai arduo. Tuttavia, la trattazione diviene notevolmente più semplice nel caso in cui la (4.1) è data dall'equazione test

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad \Re(\lambda) < 0. \quad (4.28)$$

Infatti, in questo caso la soluzione è

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

che, pertanto, ha l'origine come punto di equilibrio asintoticamente stabile. Di conseguenza, se anche la soluzione discreta, ottenuta risolvendo l'equazione

$$(\rho(E) - q\sigma(E))y_n = 0, \quad q = h\lambda, \quad (4.29)$$

avesse l'origine come punto di equilibrio asintoticamente stabile, ovvero

$$y_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.30)$$

allora necessariamente anche l'equazione dell'errore (4.16), che si riduce a

$$(\rho(E) - q\sigma(E))e_n = \tau_n,$$

sarebbe tale che

$$e_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

In tal caso, si dirà che il metodo  $(\rho, \sigma)$  è *assolutamente stabile* in  $q = \lambda$ . Essendo l'equazione (4.29) lineare a coefficienti costanti, risulta dimostrato il seguente risultato.

**Teorema 4.4** *La soluzione dell'equazione (4.29) soddisfa (4.30) se e solo se il polinomio di stabilità*

$$\pi(z, q) = \rho(z) - q\sigma(z) \quad (4.31)$$

*è un polinomio di Schur.*

**Definizione 4.1** *La regione*

$$\mathcal{D} = \{q \in \mathbb{C} : \pi(z, q) \text{ è un polinomio di Schur}\},$$

*è detta regione di assoluta stabilità del metodo  $(\rho, \sigma)$ .*

Richiedendo che (4.30) sia vera per ogni  $h > 0$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}^-$ ,<sup>3</sup> si capisce il senso della seguente, ulteriore, definizione.

<sup>2</sup>Questo, come è evidente, anche per considerazioni di efficienza computazionale.

<sup>3</sup> $\mathbb{C}^-$  denota il semipiano complesso a parte reale negativa.

**Definizione 4.2** *Un metodo LMF è detto A-stabile se  $\mathbb{C}^- \subseteq \mathcal{D}$ .*

Chiaramente, la proprietà di A-stabilità è una proprietà che lascia molta libertà nella scelta del passo  $h$  e, pertanto, è una proprietà di rilievo per un metodo LMF, come argomenteremo ulteriormente nel seguito. Tuttavia, vale il seguente risultato negativo.

**Teorema 4.5 (seconda barriera di Dahlquist)** *Non esistono metodi LMF A-stabili espliciti. Inoltre, l'ordine massimo di un LMF A-stabile è 2.*

Calcoliamo la regione di assoluta stabilità di qualcuno dei metodi su esposti. È evidente che, nel caso un metodo non sia A-stabile, una regione di assoluta stabilità più ampia consente l'utilizzo di un passo  $h$  maggiore, fissato  $\lambda \in \mathbb{C}$ , rispetto ad un metodo con una regione di assoluta stabilità più piccola.

### I due metodi di Eulero

Per il metodo di Eulero esplicito (4.18), il polinomio di stabilità è:

$$\pi(z, q) = z - (1 + q).$$

Imponendo che si abbia

$$|z| = |1 + q| < 1,$$

si ottiene che la regione di assoluta stabilità è data dal cerchio di centro -1 e raggio 1 del piano complesso, come si vede raffigurato a sinistra in Figura 4.1.

Per il metodo di Eulero implicito (4.26), il polinomio di stabilità è:

$$\pi(z, q) = (1 - q)z - 1.$$

Imponendo che si abbia

$$|z| = |1 - q|^{-1} < 1,$$

si ottiene che la regione di assoluta stabilità è data dal complemento in  $\mathbb{C}$  del cerchio chiuso di centro 1 e raggio 1 del piano complesso, come si vede raffigurato a destra in Figura 4.1. Si deduce che il metodo di Eulero implicito è A-stabile.

### Il metodo dei trapezi

Per il metodo dei trapezi (4.20), il polinomio di stabilità è:

$$\pi(z, q) = \left(1 - \frac{q}{2}\right)z - \left(1 + \frac{q}{2}\right).$$

Imponendo che si abbia

$$|z| = \frac{|2 + q|}{|2 - q|} < 1,$$

si ottiene  $\Re(q) < 0$ , ovvero

$$\mathcal{D} \equiv \mathbb{C}^-.$$

In questo caso, il metodo di dirà *perfettamente A-stabile*, in quanto la soluzione discreta ha sempre lo stesso comportamento qualitativo di quella continua.

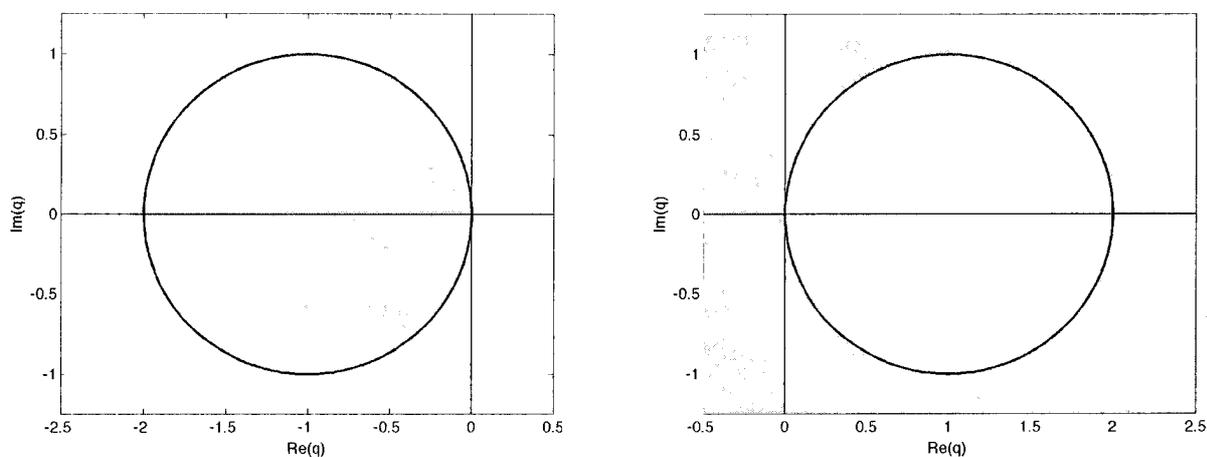


Figura 4.1: Regioni di assoluta stabilità dei metodi di Eulero esplicito (a sinistra) ed implicito (a destra).

### I metodi di Simpson e del *mid-point*

Per il metodo del *mid-point* (4.24), il polinomio di stabilità è

$$\pi(z, q) = z^2 - 2qz - 1.$$

Applicando il primo criterio di Schur, si vede che la regione di assoluta stabilità non ha punti interni. Tuttavia, potrebbe avere una frontiera, laddove il polinomio fosse di Von Neumann. Il polinomio ridotto si vede essere dato da:

$$\pi^{(1)}(z, q) = -2(q + \bar{q}) \equiv -4\Re(q).$$

Imponendo, per il secondo criterio di Schur, che esso sia identicamente nullo, si ottiene  $\Re(q) = 0$ . Pertanto avremo dei punti dell'asse immaginario. Imponendo che

$$\pi'(z, q) = 2(z - q)$$

sia quindi un polinomio di Schur, si ottiene  $|q| < 1$ . Pertanto, si conclude che

$$\bar{\mathcal{D}} = \{ix : -1 < x < 1\}.$$

Per il metodo di Simpson (4.23), il polinomio di stabilità è:

$$\pi(z, q) = \left(1 - \frac{q}{3}\right) z^2 - \frac{4}{3} qz - \left(1 + \frac{q}{3}\right).$$

Usando argomenti simili a quelli utilizzati per il metodo del *mid-point*, si arriva a concludere che

$$\bar{\mathcal{D}} = \{ix : -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}.$$

## 4.5 Il *boundary locus* di un metodo LMF

Per metodi  $(\rho, \sigma)$  più generali, potrebbe essere complesso determinare la corrispondente regione di assoluta stabilità. Per semplificare questo compito, sarà conveniente ricorrere alla

tecnica che utilizza il *boundary locus* del metodo. Quest'ultimo è definito come:

$$\Gamma = \left\{ q(\theta) = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

Infatti, essendo le radici di un polinomio funzioni analitiche dei suoi coefficienti, segue che affinché il numero di radici all'interno del cerchio aperto unitario vari, qualcuna di esse deve attraversare la circonferenza unitaria. Poiché  $\Gamma$  è il luogo dei punti del piano complesso  $q$  per cui il polinomio di stabilità ha almeno una radice di modulo 1, segue che  $\Gamma$  dividerà il piano complesso  $q$  in regioni connesse, all'interno del quale il numero di radici all'interno del cerchio unitario aperto è costante. Pertanto, basterà applicare il primo criterio di Schur ad un qualunque punto interno di ciascuna di tali regioni, per stabilire quale (o quali) di esse costituisca la regione di assoluta stabilità del metodo. A titolo di esempio, in Figura 4.2 riportiamo le regioni di assoluta stabilità calcolate con il *boundary locus*, per i metodi di Adams-Bashforth di ordine 2, per il metodo di Adams-Moulton di ordine 3. Entrambi risultano avere una regione di assoluta stabilità limitata. In Figura 4.3 è raffigurata, invece, la regione di assoluta stabilità della BDF di ordine 2. Quest'ultimo metodo risulta essere A-stabile.

## 4.6 L-stabilità

Vogliamo ora mettere in evidenza una differenza esistente tra i metodi A-stabili finora esaminati. Ovvero, il metodo dei trapezi (4.20) ed i metodi di Eulero implicito (4.26) e BDF di ordine 2 (4.27). Per il metodo dei trapezi, si ha che, applicato all'equazione test (4.28), si ottiene:

$$y_n(q) = \left( \frac{2+q}{2-q} \right)^n y_0 \rightarrow (-1)^n y_0, \quad q \rightarrow \infty.$$

In questo caso, la soluzione discreta tenderà ad oscillare, assumendo segno discorde, senza smorzarsi. Viceversa, per il metodo di Eulero implicito, si ottiene:

$$y_n(q) = \left( \frac{1}{1-q} \right)^n y_0 \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty.$$

Anche per la BDF di ordine 2 si ottiene facilmente che

$$y_n(q) \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty. \quad (4.32)$$

Chiaramente, la (4.32) descrive il comportamento qualitativamente corretto. Si capisce, pertanto, il senso della seguente nozione.

**Definizione 4.3** *Se un metodo A-stabile soddisfa la (4.32), allora esso si dirà L-stabile.*

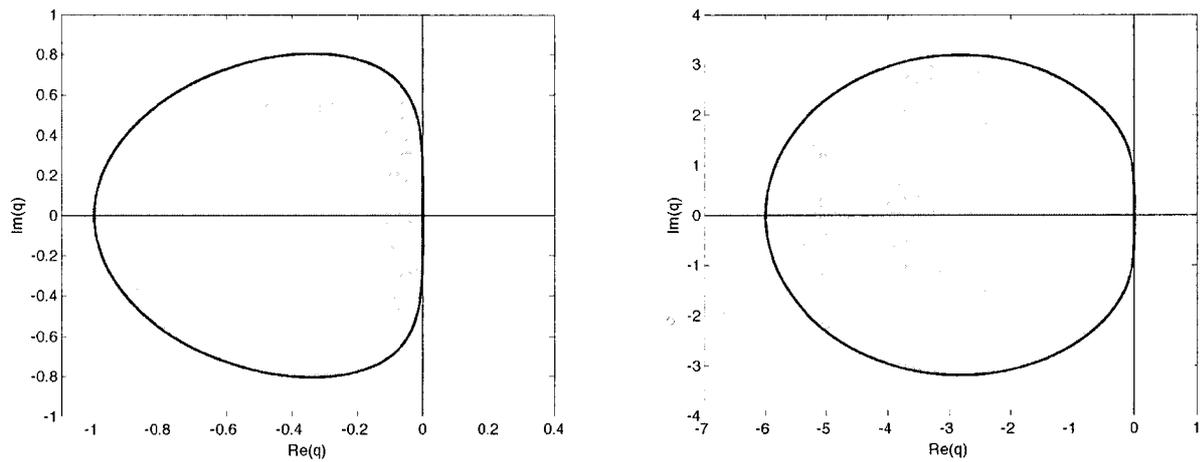


Figura 4.2: Regione di assoluta stabilità dei metodi di Adams-Bashforth di ordine 2 (a sinistra) e di Adams-Moulton di ordine 3 (a destra).

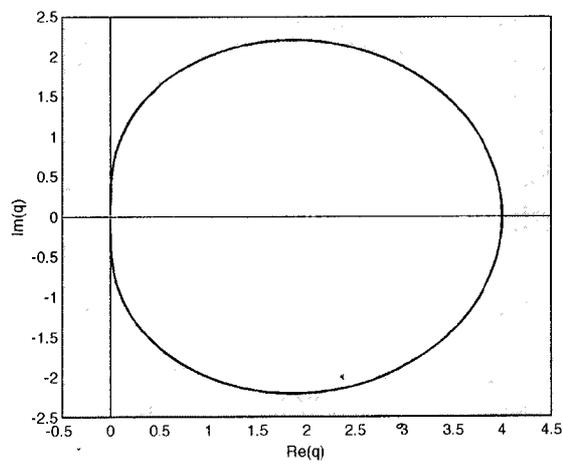


Figura 4.3: Regione di assoluta stabilità della BDF di ordine 2.