2 Equazioni alle differenze: considerazioni preliminari

Per introdurre le equazioni alle differenze, è necessario definire funzioni *discrete*, ovvero funzioni definite su un dominio discreto,

$$\Omega = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}, \quad \text{con} \quad x_n \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x_n < x_{n+1}, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Sia, dunque, $f : \Omega \to V$, con V uno spazio vettoriale (spesso, ma non sempre, si tratterà di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^m$, ovvero di $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}^m$). Useremo, ove opportuno, la notazione

$$f_n \equiv f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Esercizio 1 *Alcuni esempi di domini:*

- $\Omega = \{0, , 1, 2, \ldots\}$, *ovvero,* $x_i = i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;
- *se* $h > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}$, $\Omega = \{x, x+h, x+2h, \ldots\}$, *ovvero* $x_i = x + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

2.1 Gli operatori Δ, E, I

Definiamo, ora, gli operatori:

- *shift* E: $Ef_n = f_{n+1}$;
- *identità* I: $If_n = f_n$;
- *differenza (in avanti)* Δ: $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$.

Valgono le seguenti proprietà (la dimostrazione di quelle più ovvie è omessa per brevità):

P1: gli operatori Δ, E, I sono lineari.
Se $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ sono le successioni di due funzioni e α, β sono scalari, allora, ad esempio,

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha f_n + \beta g_n) &= (\alpha f_{n+1} + \beta g_{n+1}) - (\alpha f_n + \beta g_n) \\ &= \alpha(f_{n+1} - f_n) + \beta(g_{n+1} - g_n) = \alpha\Delta f_n + \beta\Delta g_n.\end{aligned}$$

Similmente per gli altri operatori;

P2: $\Delta = E - I, \quad E = \Delta + I$;

P3: commutatività degli operatori Δ, E, I;

P4: potenze degli operatori Δ, E, I.
Posto $E^0 = \Delta^0 = I$, si ha:

$$\Delta^k = \Delta \cdot \Delta^{k-1}, \qquad E^k = E \cdot E^{k-1}, \qquad k \geq 1.$$

In particolare, si dimostra facilmente per induzione che

$$E^k f_n = f_{n+k}, \qquad I^k = I, \qquad k \geq 0,$$

mentre, a titolo di esempio, si ha

$$\Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta(f_{n+1} - f_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n.$$

Più in generale, sfruttando le proprietà **P2** e **P3**, si ha:

$$\Delta^k f_n = (E - I)^k f_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E^i (-I)^{k-i} f_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f_{n+i}.$$

Ovvero:

$$\Delta^k = (E - I)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} E^i. \tag{7}$$

Similmente, si ottiene:

$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i. \tag{8}$$

Osserviamo che l'operatore Δ assume, nel discreto, un ruolo simile a quello dell'operatore derivata nel continuo. Questa analogia è avvalorata dai seguenti esempi.

Esercizio 2 *Siano $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, con $h > 0$ parametro fissato. Allora, dimostrare che:*

- $f \in C^{(2)}[x_n, x_{n+1}] \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f_n}{h} = f'(x_n) + O(h);$
- $f \in C^{(4)}[x_n, x_{n+2}] \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta^2 f_n}{h^2} = f''(x_{n+1}) + O(h^2).$

Esercizio 3 *Siano* $\{z_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *due successioni, allora:*

$$\begin{aligned} \Delta(z_n y_n) &= z_{n+1}\Delta y_n + (\Delta z_n) y_n \\ &= (\Delta z_n) y_{n+1} + z_n \Delta y_n \\ &= z_n \Delta y_n + (\Delta z_n) y_n + (\Delta z_n)(\Delta y_n). \end{aligned} \tag{9}$$

Inoltre, se $z_n \neq 0$*, per ogni* n*, allora:*

$$\Delta \frac{y_n}{z_n} = \frac{z_n \Delta y_n - y_n \Delta z_n}{z_n z_{n+1}}.$$

Osserviamo che, assegnata $\{y_n\}$, si ha:

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} \Delta y_n = y_N - y_{n_0} \equiv y_n \big|_{n=n_0}^{N}. \tag{10}$$

In questo senso, se assimiliamo l'operatore Δ all'operatore derivata nel continuo, dalla (10) segue che l'operatore di *sommatoria definita* è assimilabile all'operatore di integrazione definita. Osserviamo che la (10) può essere riscritta anche come:

$$y_N = y_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{N-1} \Delta y_n, \tag{11}$$

che risulta formalmente simile al teorema fondamentale del calcolo. Analogamente all'operatore continuo, dalla (9) segue la seguente *formula di sommazione per parti*:

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} y_n \Delta z_n = (y_n z_n)\big|_{n=n_0}^{N} - \sum_{n=n_0}^{N-1} z_{n+1} \Delta y_n.$$

2.2 Equazioni alle differenze del primo ordine

Consideriamo, ora, l'*equazione alle differenze*

$$\Delta y_n = g_n, \qquad n \geq n_0, \tag{12}$$

in cui supponiamo che la successione $\{g_n\}$ sia nota. L'equazione è detta *del primo ordine*, in quanto può essere riscritta come

$$y_{n+1} = y_n + g_n, \qquad n \geq n_0. \tag{13}$$

Allora, formalmente, la sua soluzione verrà denotata con

$$y_n = \Delta^{-1} g_n, \tag{14}$$

in cui Δ^{-1} è l'operatore *antidifferenza*. Sostituendo la (14) nella (12), si ottiene che

$$\Delta(\Delta^{-1} g_n) = g_n,$$

da cui si conclude che, formalmente,

$$\Delta\Delta^{-1} = I. \tag{15}$$

Osserviamo tuttavia che tale soluzione non è unica, in quanto, se $\{w_n\}$ è una successione costante (data da una qualunque funzione che assuma valori costanti in Ω), allora, risulta $\Delta w_n = 0$ e, pertanto,

$$y_n = \Delta^{-1} g_n + w_n, \tag{16}$$

è ancora soluzione della (12). Pertanto,

$$\Delta^{-1} g_n = y_n - w_n.$$

Sostituendo, in virtù della (12) $g_n = \Delta y_n$, si ottiene, quindi,

$$\Delta^{-1}(\Delta y_n) = y_n - w_n, \tag{17}$$

da cui si deduce, utilizzando un abuso di notazione, che

$$\Delta^{-1}\Delta = I - w_n,$$

stando ciò a significare che il primo membro consiste nell'applicare l'operatore I sottraendo una qualunque successione costante al risultato ottenuto. Da quanto appena esposto, segue che dall'equazione

$$\Delta y_n = \Delta z_n, \qquad n \geq n_0,$$

segue che, in virtù della (17), che

$$y_n = z_n + w_n, \qquad n \geq n_0,$$

essendo, al solito, $\{w_n\}$ una successione costante.

Evidentemente, la (successione) costante nella (16) viene univocamente determinata nel momento in cui alla equazione (12) è associata una *condizione* *iniziale* y_{n_0}. In tal caso, infatti, la successione soluzione $\{y_n\}$ è univocamente determinata, in virtù della formulazione equivalente (13), avendo fissato il valore iniziale y_{n_0}.

Osserviamo che, in virtù della (11), dalle (12) e (14) segue che, in analogia con il caso continuo,

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} g_n = \sum_{n=n_0}^{N-1} \Delta y_n = y_N - y_{n_0} = \Delta^{-1} g_n \Big|_{n=n_0}^{N}. \tag{18}$$

Pertanto, conoscere l'antidifferenza di una funzione discreta, consente di cacolarne facilmente le somme tra due qualunque indici assegnati. Questo risultato costituisce l'analogo discreto del caso in cui, nel continuo, è facile calcolare l'integrale definito di una funzione di cui sia nota la sua primitiva.

2.3 Potenze fattoriali

Abbiamo visto che gli operatori differenza ed antidifferenza svolgono un ruolo analogo agli operatori di derivazione ed integrazione nel continuo. Nel continuo è facile calcolare la derivata e l'integrale della funzione potenza n-esima (con $n \geq 1$):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}, \qquad \int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + cost, \qquad n \geq 1.$$

Inoltre,

$$x^0 = 1, \quad \forall x, \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{se} \quad x \neq 0.$$

Nel discreto, questo ruolo è assunto dalla *pseudopotenza*, o *potenza fattoriale*, di x:

$$x^{(n)} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}_{n}. \tag{19}$$

Quindi, ad esempio,

$$10^{(4)} = 10(10-1)(10-2)(10-3) = 5040,$$

che, osserviamo, differisce alquanto da 10^4. Definendo la funzione discreta $g_k = (x+k)^{(n)}$, essendo $x \in \mathbb{R}$ assegnato (ovvero, assumendo $\Omega = \{x, x+1, x+2, \ldots\}$), si verifica facilmente che

$$\Delta x^{(n)} = (x+1)^{(n)} - x^{(n)} = n x^{(n-1)},$$

da cui si deduce, in sempre analogia con il caso continuo, che

$$\Delta^{-1}x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} - w(x),$$

essendo $w(n)$ una funzione periodica di periodo 1. Inoltre, dalla relazione:

$$\begin{aligned} x^{(m+n)} &= x(x-1)\cdots(x-m+1)\cdot(x-m)\cdots(x-m-n+1) \\ &= x^{(m)}(x-m)^{(n)}. \end{aligned} \tag{20}$$

Ponendo, nella (20) $m = 0$, si ottiene:

$$x^{(n)} = x^{(0)}x^{(n)},$$

da cui si ricava, in analogia con il caso continuo, che

$$x^{(0)} = 1. \tag{21}$$

Similmente, ponendo nella (20) $m = -n$, si ottiene

$$x^{(0)} = x^{(-n)}(x+n)^{(n)}$$

da cui, se $(x+n)^{(n)} \neq 0$, si ricava, tenendo conto delle (19) e (21):

$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+n)^{(n)}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}. \tag{22}$$

Vediamo alcune semplici proprietà delle potenze fattoriali:

- se $x \in \mathbb{R}$, allora $x^{(n)}$ è un polinomio monico di grado n in x;
- se k è un intero naturale, $k^{(n)} = 0$, se $n > k$;
- se k è un intero, $k^{(k)} = k^{(k-1)} = k!$;
- se n, k sono interi, $n \geq k$,

$$\frac{n^{(k)}}{k^{(k)}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

2.4 I numeri di Stirling

È possibile stabilire precisamente la relazione algebrica tra potenze e pseudo-potenze. In particolare, questa è definita da:

$$x^n = \sum_{i=1}^{n} S_i^n x^{(i)}, \qquad n \geq 1, \tag{23}$$

dove i coefficienti $\{S_i^n\}$ sono i *numeri di Stirling di seconda specie* (si veda la Tabella 1). Vale il seguente risultato.

Teorema 1 *I numeri di Stirling sono definiti in modo ricorrente come segue, per ogni* $n \geq 1$*:*

$$S_1^n = S_n^n = 1,$$

e, inoltre,

$$S_i^{n+1} = S_{i-1}^n + iS_i^n, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Dimostrazione. Per $n = 1$ si ottiene $S_1^1 = 1$, e questo è vero, avendosi $x^{(1)} = x$. Assunto vera la tesi per n, si ottiene, per $n+1$:

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= x \cdot x^n = x \sum_{i=1}^{n} S_i^n x^{(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_i^n (x - i + i) x^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} S_i^n \left[(x-i)x^{(i)} + ix^{(i)} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_i^n \left[x^{(i+1)} + ix^{(i)} \right] = S_1^n x^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} (S_{i-1}^n + iS_i^n) x^{(i)} + S_n^n x^{(n)} \\
&\equiv \sum_{i=1}^{n+1} S_i^{n+1} x^{(i)},
\end{aligned}$$

da cui la tesi segue facilmente. □

Osserviamo che, definendo la matrice triangolare inferiore (a diagonale unitaria)

$$T_n = \begin{pmatrix} S_1^1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ S_1^n & \ldots & S_n^n \end{pmatrix}$$

Tabella 1: Numeri di Stirling di seconda specie (vedi (23)).

$n \backslash i$	1	2	3	4	5	...
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
$\vdots$	$\vdots$					$\ddots$

Tabella 2: Numeri di Stirling di prima specie (vedi (24)).

$n \backslash i$	1	2	3	4	5	...
1	1					
2	-1	1				
3	2	-3	1			
4	-6	11	-6	1		
5	24	-50	35	-10	1	
$\vdots$	$\vdots$					$\ddots$

ed i vettori

$$\mathbf{x}^n = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix},$$

vale, in virtù della (23)

$$\mathbf{x}^n = T_n \mathbf{x}^{(n)}.$$

Da questo si ricava che

$$\mathbf{x}^{(n)} = T_n^{-1} \mathbf{x}^n.$$

Denotando con s_j^i, $i, j = 1, \ldots, n$, l'elemento (i, j) della matrice triangolare inferiore T_n^{-1}, si ricava l'espressione delle potenze fattoriali in funzione delle potenze:

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} s_i^n x^i, \qquad n \geq 1. \tag{24}$$

Alcuni dei coefficienti $\{s_i^n\}$, denominati *numeri di Stirling di prima specie*, sono riportati in Tabella 2.

La relazione (23) che lega potenze e pseudopotenze, permette di derivare facilmente alcune interessanti proprietà.

Teorema 2 *Se* $p(x) \in \Pi_n$, *allora* $\Delta^j p(x) \in \Pi_{\max(0,n-j)}$.

Dimostrazione. Infatti, basta osservare che, in generale,

$$\begin{aligned} \Delta^j x^k &= \Delta^j \left[\sum_{i=1}^{k} S_i^k x^{(i)} \right] = \sum_{i=1}^{k} S_i^k \Delta^j x^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} S_i^k i^{(j)} x^{(i-j)} \quad \in \quad \Pi_{\max(0,k-j)}. \end{aligned}$$

$\square$

Vediamo qualche applicazione delle potenze fattoriali:

1. $\Delta \binom{x}{j} = \binom{x-1}{j-1}$. Infatti:

$$\begin{aligned} \Delta \binom{x}{j} &\equiv \binom{x+1}{j} - \binom{x}{j} = \frac{\Delta x^{(j)}}{j!} \\ &= \frac{j x^{(j-1)}}{j!} = \frac{x^{(j-1)}}{(j-1)!} = \binom{x}{j-1}. \end{aligned}$$

2. Dalla precedente proprietà, discende immediatamente che:

$$\Delta^{-1} \binom{x}{j} = \binom{x}{j+1} + w(x),$$

dove $w(x)$ è periodica di periodo 1.

3. $\sum_{x=k}^{n} \binom{x}{j} = \binom{n+1}{j+1} - \binom{k}{j+1}$. Infatti:

$$\sum_{x=k}^{n} \binom{x}{j} = \Delta^{-1} \binom{x}{j} \Big|_{x=k}^{n+1} = \binom{n+1}{j+1} - \binom{k}{j+1}.$$

Esercizio 4 *Calcolare, utilizzando le potenze fattoriali,*

$$\sum_{i=1}^{n} i^k, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

2.5 Ancora sulle equazioni alle differenze del primo ordine

Abbiamo visto che la soluzione di una equazione alle differenze del primo ordine (13) in cui sia assegnata la condizione iniziale y_{n_0}, è data da:

$$y_n = y_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i, \qquad n \geq n_0. \tag{25}$$

Possiamo generalizzare questo risultato al caso di equazioni del tipo:

$$y_{n+1} = p_n y_n + g_n, \qquad n \geq n_0, \qquad y_{n_0} \quad \text{fissato}, \tag{26}$$

in cui le successioni $\{p_n\}$ e $\{g_n\}$ sono note e, inoltre, $p_n \neq 0$, per ogni $n \geq n_0$. Ponendo:

$$P_{n_0} = 1, \qquad P_{n+1} = P_n \cdot p_n \equiv \prod_{i=n_0}^{n} p_i, \qquad n \geq n_0, \tag{27}$$

si ottiene, dividendo i due membri della (26) per P_{n+1}:

$$\frac{y_{n+1}}{P_{n+1}} = \frac{y_n}{P_n} + \frac{g_n}{P_{n+1}}, \qquad n \geq n_0.$$

Ponendo

$$z_n = y_n P_n^{-1}, \quad q_n = g_n P_{n+1}^{-1}, \qquad n \geq n_0, \tag{28}$$

si perviene, infine, all'equazione

$$z_{n+1} = z_n + q_n, \qquad n \geq n_0, \qquad z_{n_0} = y_{n_0}, \tag{29}$$

che è della forma (13). La soluzione è, pertanto (vedi (25)),

$$z_n = z_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} q_i, \qquad n \geq n_0.$$

Tenendo conto delle (27)-(28), si ottiene:

$$y_n = y_{n_0} P_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i P_{i+1}^{-1} P_n \equiv y_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} p_k + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} p_k, \qquad n \geq n_0, \tag{30}$$

che, evidentemente, soddisfa la condizione iniziale.

Osservazione 1 *Si dimostra facilmente che l'ultimo membro della (30) risulta essere ancora definito, e fornisce una espressione esplicita della soluzione* $\{y_n\}$, *anche rilassando la condizione* $p_n \neq 0$, $n \geq n_0$.

Esercizio 5 *Risolvere l'equazione*

$$y_{n+1} = \left(y_n + \frac{A}{y_n}\right), \qquad n \geq 0,$$

dove $y_0 > 0$ *e* $A > 0$. *Determinarne, quindi, il limite per* $n \to \infty$. *(Suggerimento: porre* $y_n = \sqrt{A}\,\mathrm{cotgh}\, z_n$*).*

Esercizio 6 (Metodo di Horner) *Risolvere l'equazione*

$$y_i = xy_{i-1} + b_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad y_0 = b_0, \tag{31}$$

in cui $x \in \mathbb{R}$ *è assegnato. Dimostrare che* $y_n = \sum_{i=0}^{n} b_i x^{n-i}$. *La (31) definisce il metodo di Horner per il calcolo del polinomio* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^{n-i}$, *con una complessità di* $2n$ *operazioni algebriche elementari.*

2.6 Teoremi del confronto

Oltre alle equazioni alle differenze, è spesso utile, in Analisi Numerica, poter discutere *disequazioni alle differenze.* Alcune di queste, possono essere studiate in modo relativamente semplice mediante il *principio del confronto*, che si applica anche al caso continuo, oltre che a quello discreto. Di seguito, si enunciano i risultati più importanti.

Teorema 3 *Sia* $g(n, y)$ *una funzione non decrescente rispetto al secondo argomento. Si considerino, quindi, le seguenti disequazioni alle differenze:*

$$y_{n+1} \leq g(n, y_n), \qquad u_{n+1} \geq g(n, u_n), \qquad n \geq n_0.$$

Se $y_{n_0} \leq u_{n_0}$, *allora:* $y_n \leq u_n$, *per ogni* $n \geq n_0$.

Dimostrazione. Ragionando per induzione, la tesi è vera per $n = n_0$. Supponiamola vera per n, ovvero $y_n \leq u_n$, e dimostriamo per $n + 1$. Si ottiene:

$$y_{n+1} \leq g(n, y_n) \leq g(n, u_n) \leq u_{n+1},$$

in virtù dell'ipotesi di induzione. □

Osserviamo che, nel precedente teorema, se si assume una delle due disequazioni essere una equazione alle differenze, la tesi continua a valere. Risolvendo questa equazione, denominata *equazione del confronto*, è possibile ottenere una maggiorazione (o minorazione, a seconda del caso) esplicita per ogni successione che soddisfa l'altra disequazione.

Teorema 4 *Sia $g(n,i,y)$ non decrescente rispetto ad y. Inoltre, supponiamo che:*

$$y_n \leq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n,i,y_i), \qquad u_n \geq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n,i,u_i), \qquad n \geq n_0.$$

Allora, $y_n \leq u_n$, per $n \geq n_0$.

Dimostrazione. La tesi è evidentemente vera per $n = n_0$, avendosi

$$y_{n_0} \leq p_{n_0} \leq u_{n_0}.$$

Si supponga vera la tesi fino ad $n-1$, e dimostriamo per n:

$$y_n \leq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n,i,y_i) \leq p_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} g(n,i,u_i) \leq u_n,$$

in virtù dell'ipotesi di induzione $y_i \leq u_i$, $i = n_0, \ldots, n-1$. □

Da questi, si ottengono i seguenti corollari.

Corollario 1 *Siano $p_n \geq 0$ e g_n, per $n \geq n_0$, successioni note. Sia inoltre $\{y_n\}$ tale che:*

$$y_{n+1} \leq p_n y_n + g_n, \qquad n \geq n_0.$$

Allora:

$$y_n \leq y_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} p_k + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} p_k, \qquad n \geq n_0.$$

Dimostrazione. La tesi discende immediatamente dalla (30), considerando che l'equazione del confronto coincide, in questo caso, con la (26). □

Corollario 2 *Siano* $p_n \geq 0$ *e* g_n*, per* $n \geq n_0$*, successioni note. Sia inoltre* $\{y_n\}$ *tale che:*

$$y_n \leq y_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} [p_i y_i + g_i], \qquad n \geq n_0.$$

Allora:

$$y_n \leq y_{n_0} \exp\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} p_k\right) + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i \exp\left(\sum_{k=i+1}^{n-1} p_k\right), \qquad n \geq n_0.$$

<u>Dimostrazione.</u> L'equazione del confronto è:

$$u_n = y_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} [p_i u_i + g_i], \qquad n \geq n_0.$$

Da questa si ottiene che

$$\Delta u_n = p_n u_n + g_n,$$

la cui soluzione è data da (confronta con (26) e (30))

$$u_n = y_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} (1 + p_k) + \sum_{i=n_0}^{n-1} g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} (1 + p_k), \qquad n \geq n_0.$$

La tesi si completa osservando che, essendo $p_k \geq 0$, allora $(1+p_k) \leq \exp p_k$. □

Corollario 3 (Lemma di Gronwall nel discreto) *Siano* $p_n \geq 0$ *e* g_n*, per* $n \geq n_0$*, successioni note e, inoltre,*

$$y_n \leq g_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i y_i, \qquad n \geq n_0. \tag{32}$$

Allora, per $n \geq n_0$*:*

$$y_n \leq g_{n_0} \exp\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} p_k\right) + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta g_i \exp\left(\sum_{k=i+1}^{n-1} p_k\right), \tag{33}$$

$$y_n \leq g_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i g_i \exp\left(\sum_{k=i+1}^{n-1} p_k\right). \tag{34}$$

Dimostrazione. La (33) discende facilmente considerando l'equazione del confronto

$$u_n = g_n + \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i u_i, \qquad n \geq n_0,$$

da cui si deduce

$$\Delta u_n = \Delta g_n + p_n u_n, \qquad n \geq n_0, \qquad u_{n_0} = g_{n_0},$$

ovvero

$$u_{n+1} = (1 + p_n) u_n + \Delta g_n, \qquad n \geq n_0, \qquad u_{n_0} = g_{n_0}.$$

La soluzione è quindi data da (confrontare con (26) e (30))

$$u_n = g_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} (1 + p_k) + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta g_i \prod_{k=i+1}^{n-1} (1 + p_k), \qquad n \geq n_0.$$

La (33) si ottiene quindi osservando che, essendo $p_k \geq 0$, allora $(1 + p_k) \leq \exp p_k$. Per dimostrare la (34), si ponga:

$$v_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} p_i y_i, \qquad n \geq n_0.$$

Pertanto la (32) diviene:

$$y_n \leq g_n + v_n, \qquad n \geq n_0. \tag{35}$$

D'altronde, si ha

$$\Delta v_n = p_n y_n \leq p_n g_n + p_n v_n,$$

ovvero:

$$v_{n+1} = (1 + p_n) v_n + p_n g_n, \qquad n \geq n_0, \qquad v_{n_0} = 0.$$

Usando argomenti simili a quelli usati nella dimostrazione del Corollario 2 si ottiene, quindi,

$$v_n \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i g_i \exp\left(\sum_{k=i+1}^{n-1} p_k \right).$$

La (34) si ottiene quindi sostituendo questa espressione al secondo membro della (35). □

Risultati analoghi a quelli visti nel caso discreto valgono nel caso continuo. Si riportano di seguito per completezza, omettendone la dimostrazione.

Teorema 5 *Sia $g(t, y)$ continua e Lipschitziana rispetto a y. Se $y(t)$ e $u(t)$ sono due funzioni derivabili tali che*

$$y'(t) \leq g(t, y(t)), \qquad u'(t) \geq g(t, u(t)), \qquad t \in [t_0, T],$$

e, inoltre, $y(t_0) \leq u(t_0)$, allora:

$$y(t) \leq u(t), \qquad t \in [t_0, T].$$

Corollario 4 (Lemma di Gronwall) *Sia*

$$y(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^{t} p(s) y(s) \mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, T],$$

essendo $g(t)$ e $p(t)$ funzioni continue assegnate. Allora:

$$y(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^{t} p(s) g(s) \exp\left(\int_{s}^{t} p(x) \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, T].$$