Risoluzione iterativa di "piecewise-linear systems" e loro applicazione al flusso in mezzi porosi

Luigi Brugnano

http://www.math.unifi.it/~brugnano

Firenze, 21 gennaio 2010

Sommario:

- Motivazioni
- Un esempio: la modellizzazione di falde freatiche
- Modellizzazione mediante "piecewise-linear systems"
- Risoluzione iterativa
- Estensioni
- Esempi di applicazione

Motivazioni

- In molti problemi applicativi descritti da equazioni di evoluzione, la soluzione deve soddisfare determinati requisiti di ammissibilità, che hanno un preciso significato fisico.
- Un esempio è dato dalla positività che, se violata, da origine a soluzioni non ammissibili (ad esempio, la concentrazione di specie chimiche in una reazione).
- In particolare, esamineremo il problema di flussi in mezzi porosi e, più in particolare, di acquiferi.

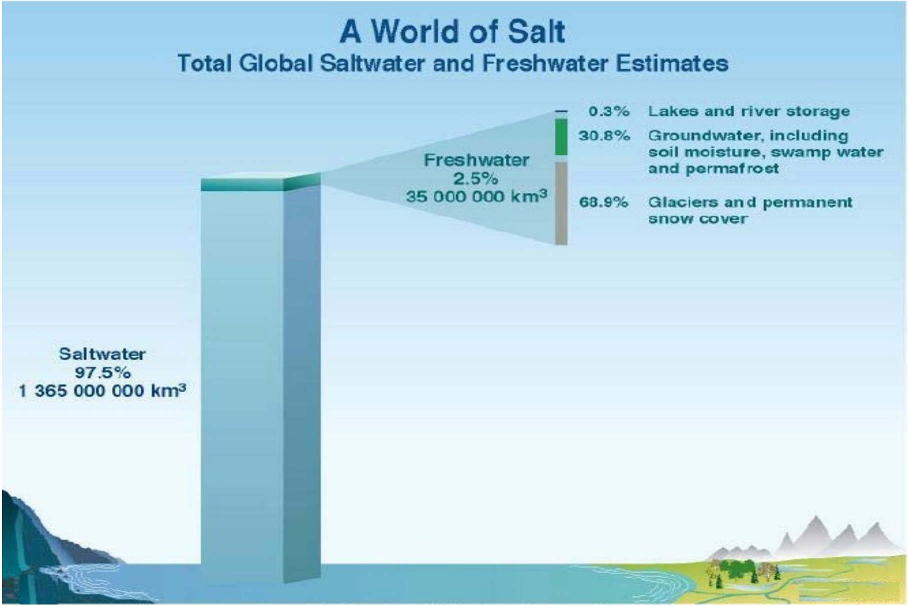
Acquiferi

Un acquifero (*aqua+ferre*) è una formazione geologica che [1]:

- contiene acqua,
- permette, in condizioni normali, che essa fluisca attraverso esso.

Gli acquiferi rappresentano una delle maggiori riserve di acqua dolce disponibili.

[1] J. Bear, A. Verruijt
Modelling Groundwater Flow and Pollution
D. Reidel Publ. Co., 1987.


A World of Salt
Total Global Saltwater and Freshwater Estimates
0.3% Lakes and river storage
30.8% Groundwater, including soil moisture, swamp water and permafrost
68.9% Glaciers and permanent snow cover
Freshwater
2.5%
35 000 000 km3
Saltwater
97.5%
1 365 000 000 km3

THE

PUBLIC FOUNTAINS

OF THE CITY OF DIJON

EXPERIENCE AND APPLICATION

PRINCIPLES TO FOLLOW AND FORMULAS TO BE USED

IN THE QUESTION

OF

THE DISTRIBUTION OF WATER

WORK FINISHES WITH

AN APPENDIX RELATING TO THE WATER SUPPLIES OF SEVERAL CITIES

THE FILTERING OF WATER

AND

THE MANUFACTURE OF STRONG PIPES OF LEAD, SHEET METAL AND BITUMEN

BY

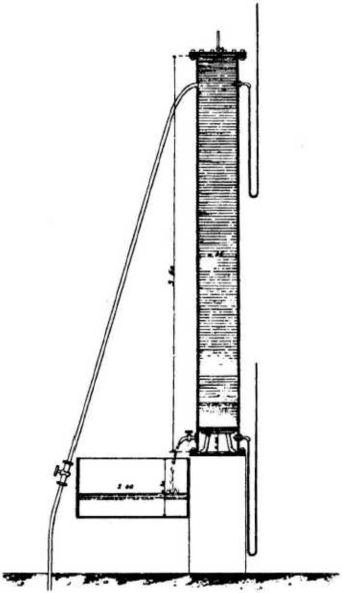
HENRY DARCY
INSPECTOR GENERAL OF BRIDGES AND HIGHWAYS

> The good quality of water is one of things which contribute the most to the health of citizen of a city. There is nothing that the magistrate should have more of interest in then maintaining the quality of that which is useful for the drink commune of man and of animal, and remedies accidents by which these water can be altered, be in the read of fountain, of river, of brook or they run, be in the place or be conserved that that one in derive, be finally in the well of or be born of source.
> (De JUSSIEU, *Hist. de l'Académie royale des sciences, 1733, p. 351.*)

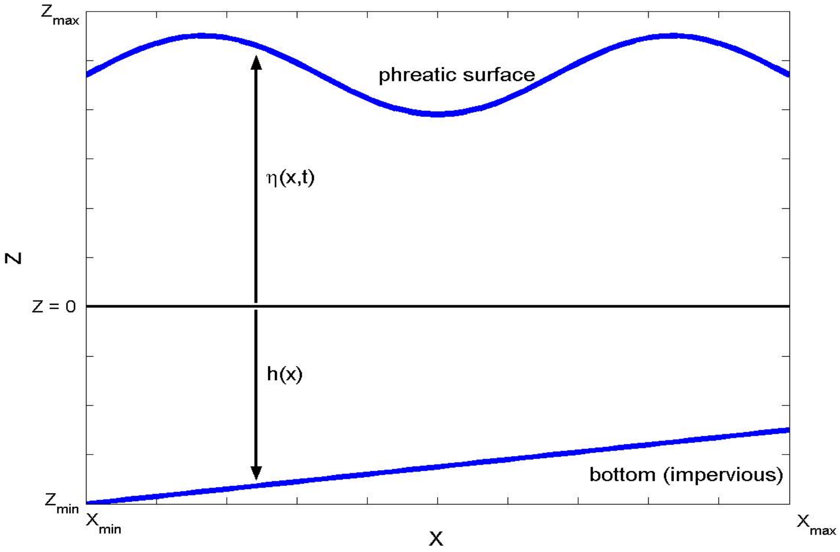
PARIS

VICTOR DALMONT, EDITOR,
Successor of Carilian-Gaery and Vor Dalmont,
BOOKSELLER OF THE IMPERIAL CORPS OF BRIDGES, HIGHWAYS AND MINES,
Quay of Augustins, 49.

1856



Falda freatica



Modellizzazione

Equazioni di Darcy

$$
\begin{aligned}
0 &= -p_x - \gamma u, \\
0 &= -p_z - \gamma w - \rho g, \qquad (\gamma = \mu/\kappa)
\end{aligned}
$$

Continuità

$$
0 = u_x + w_z,
$$

Superfice libera

$$
\varepsilon \eta_t = -\left[\int_{-h}^{\eta} u \, dz\right]_x + \varphi.
$$

Semplificazione di Dupuit

Nel caso in esame, essa non è altro che l'approssimazione di pressione idrostatica,

$$p(x, z, t) = p_0 + \rho g(\eta - z),$$

da cui si ricava:

$$u = -\frac{\kappa \rho g}{\mu}\eta_x \equiv -K\eta_x,$$

dove K è la conduttività idraulica del mezzo.

Equazione di Boussinesq

- Sostituendo la precedente espressione di u nell'equazione della superfice libera, si ottiene:

$$\varepsilon\eta_t = K\left[(h+\eta)\eta_x\right]_x + \varphi,$$

che è l'equazione di Boussinesq in una dimensione.

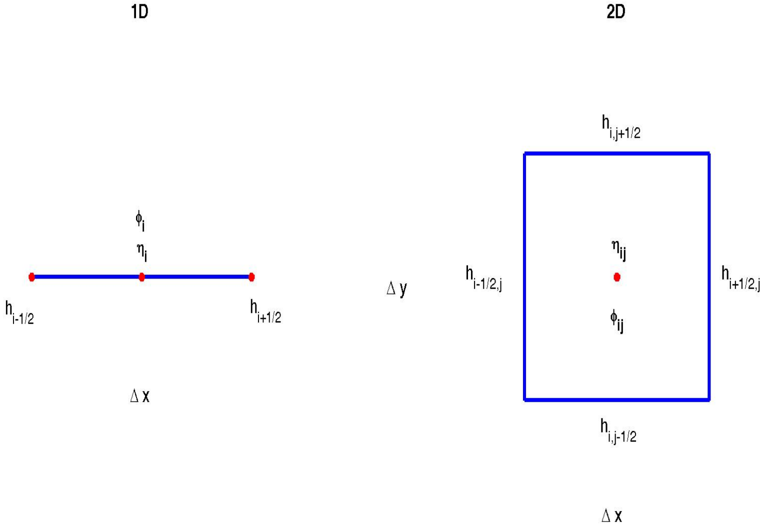
- In due dimensioni si otterrebbe, in modo analogo:

$$\varepsilon\eta_t = K\left(\left[(h+\eta)\eta_x\right]_x + \left[(h+\eta)\eta_y\right]_y\right) + \varphi.$$

- Questa equazione è definita nella parte "bagnata" del dominio:

$$\Omega(t) = \left\{(x,y)\ :\ h(x,y) + \eta(x,y,t) > 0\right\}.$$

"Staggered grid"



Discretizzazione semi-implicita

Utilizzando la "staggered-grid", si ottiene (nel caso 1D), l'approssimazione al tempo $(\ell+1)\Delta t$ come:

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{\Delta t}\left(\eta_i^{\ell+1}-\eta_i^{\ell}\right) \quad - \quad & \frac{K}{\Delta x^2}\left[\left(\eta_{i+\frac{1}{2}}^{\ell}+h_{i+\frac{1}{2}}\right)\left(\eta_{i+1}^{\ell+1}-\eta_i^{\ell+1}\right)\right. \\
& \left. -\left(\eta_{i-\frac{1}{2}}^{\ell}+h_{i-\frac{1}{2}}\right)\left(\eta_i^{\ell+1}-\eta_{i-1}^{\ell+1}\right)\right]=\varphi_i^{\ell+1},
\end{aligned}
$$

$$
i \in \Omega^{\ell}.
$$

Si può dimostrare che questa equazione definisce, nel discreto, un bilancio di massa, per cui la massa del fluido viene esattamente conservata ad ogni passo temporale.

Forma vettoriale

$$\left(I + T^{\ell}\right) \boldsymbol{\eta}^{\ell+1} = \boldsymbol{\eta}^{\ell} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\ell+1},$$

dove:

- T^{ℓ} è simmetrica e semidefinita positiva;
- $\left(I + T^{\ell}\right)$ è Stieltjes, i.e., una M-matrice simmetrica.

M-matrici

Hanno inversa ad elementi non negativi. Appartengono alla famiglia delle matrici monotone, molto importanti nelle applicazioni, perché preservano le diseguaglianze:

$$M\mathbf{x} \le \mathbf{b} \quad \wedge \quad M^{-1} \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} \le M^{-1}\mathbf{b}.$$

T^ℓ

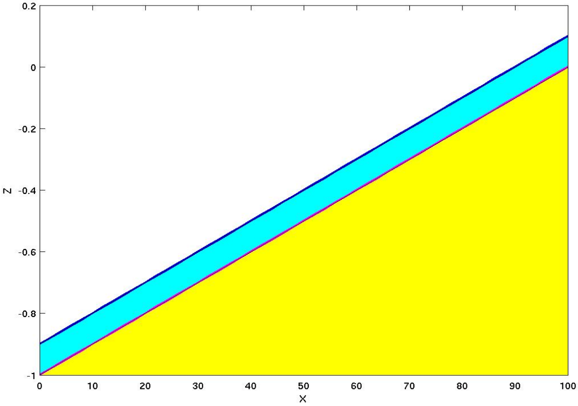
In particolare, T^ℓ è una matrice sparsa, ovvero con un numero di elementi non nulli proporzionale alla sua dimensione. Quest'ultima è pari al numero di punti "bagnati" nel dominio. Essa risulta essere:

- definita positiva se l'elevazione della superficie libera è assegnata in almeno un punto della frontiera;
- semidefinita positiva se solo il flusso è assegnato sulla frontiera. In questo caso, inoltre,

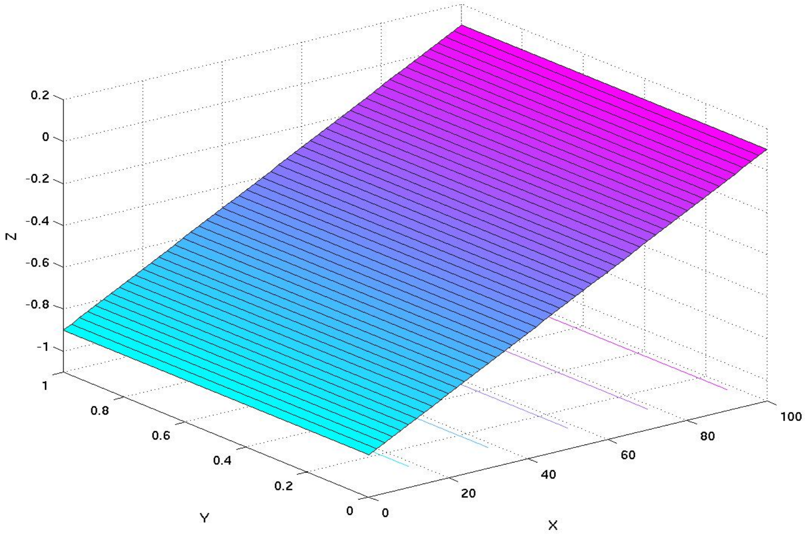
$$\texttt{null}(T^\ell) = \texttt{span}(\mathbf{v}), \quad \text{con} \quad \mathbf{v} > 0.$$

Positività della soluzione

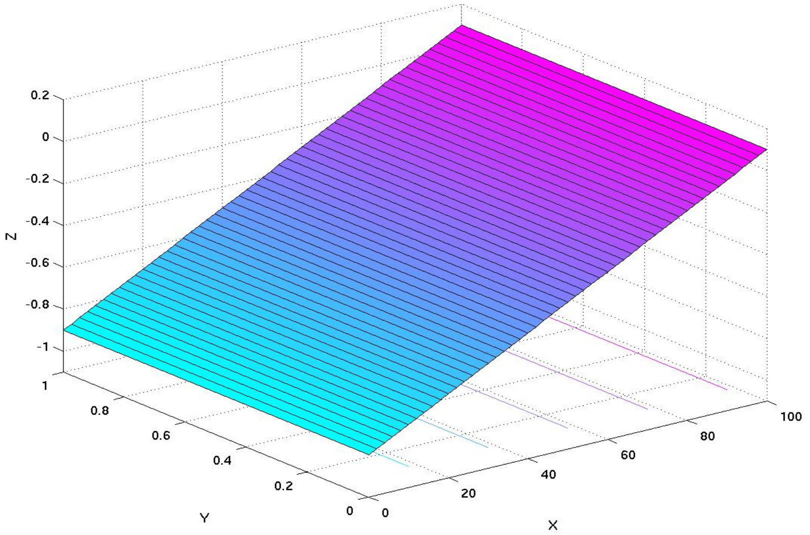
Tuttavia, l'esatto bilancio di massa può essere inficiato da elevazioni totali dal fondo, $h_i + \eta_i^\ell$, negative.



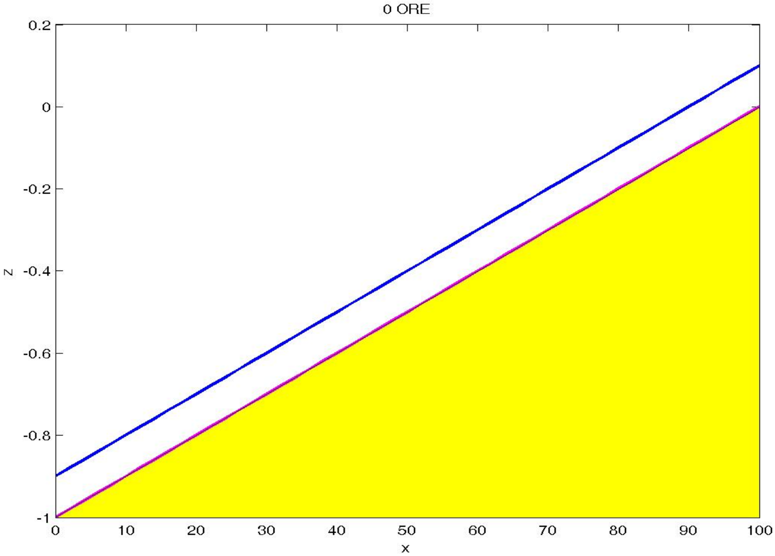
Teoricamente



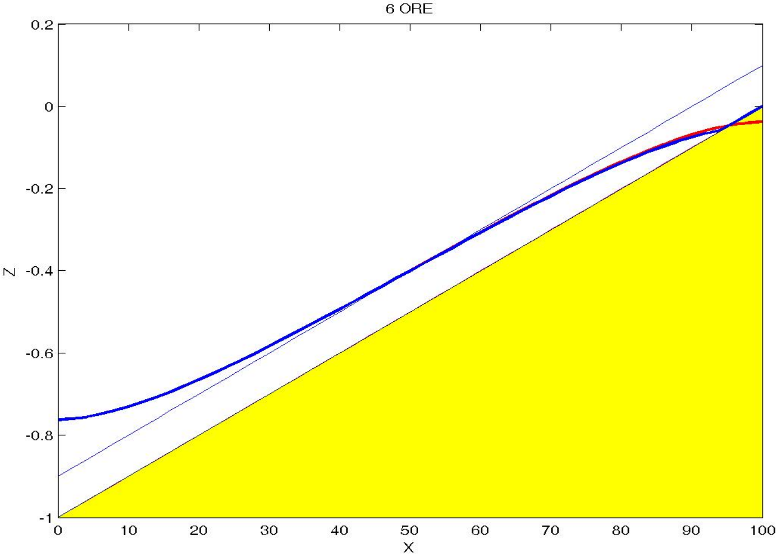
In pratica



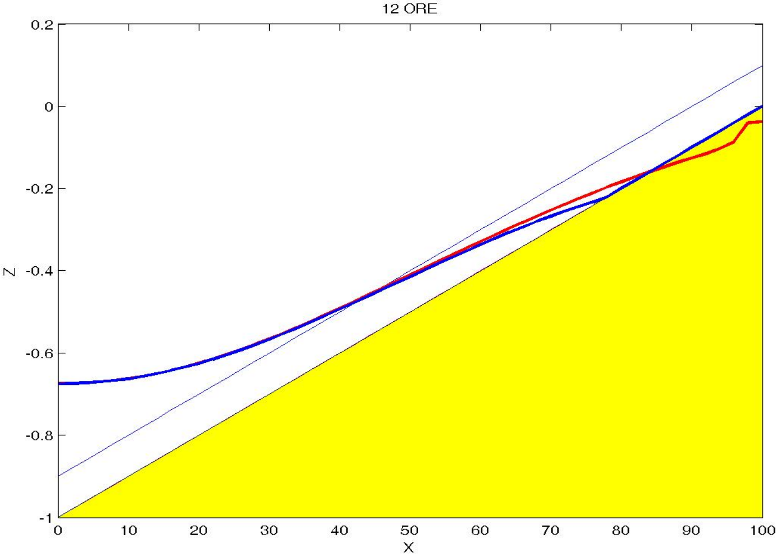
Volume = 100.00



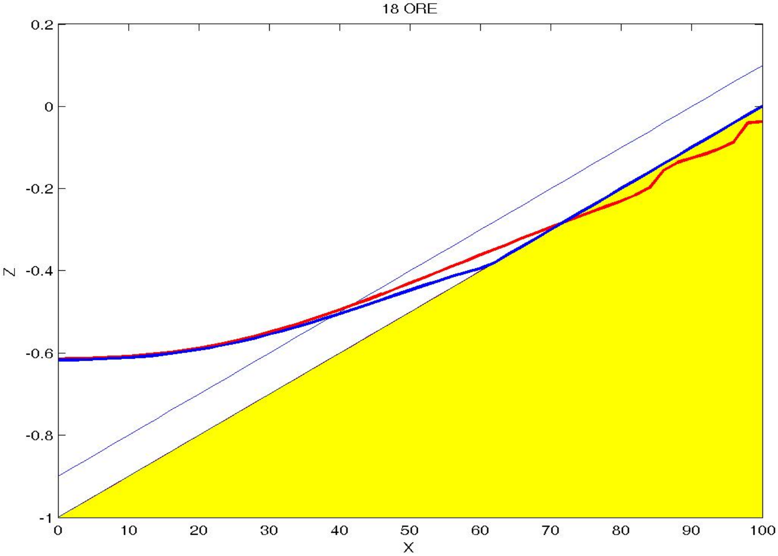
Volume = 101.20



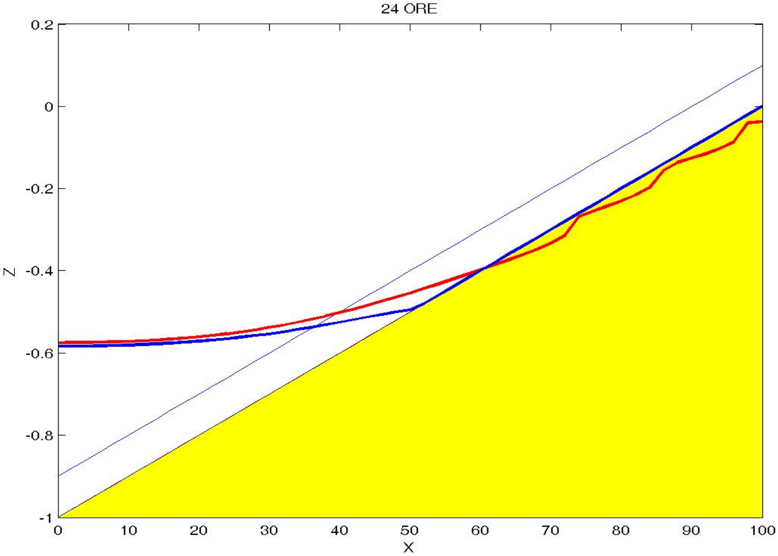
Volume = 104.53



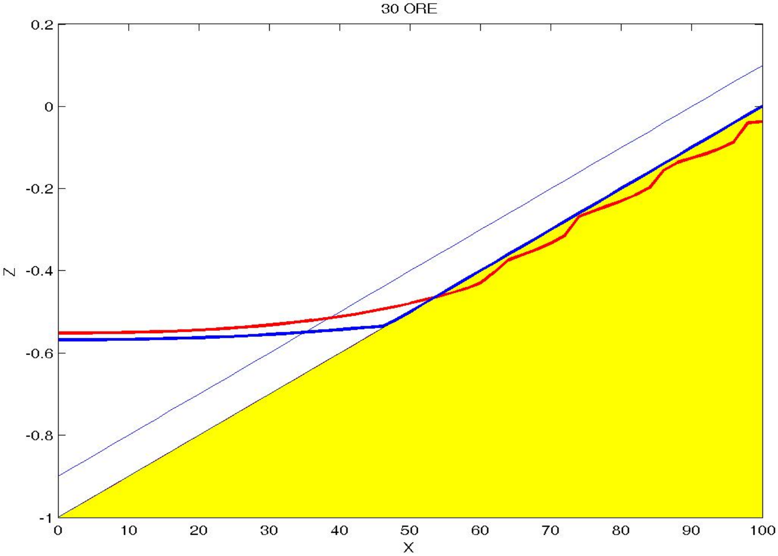
Volume = 107.65



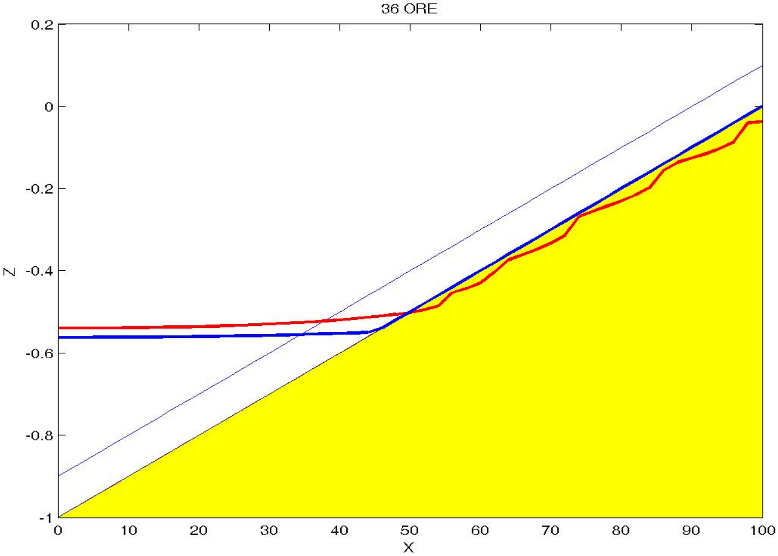
Volume = 110.27



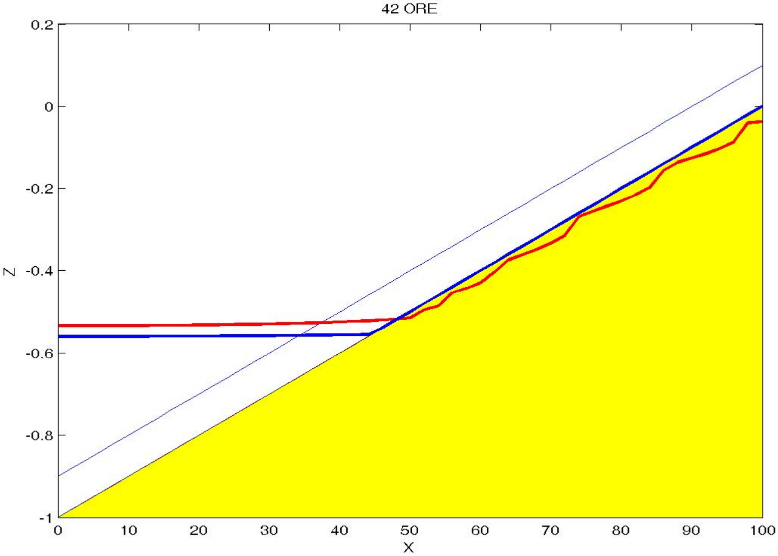
Volume = 111.98



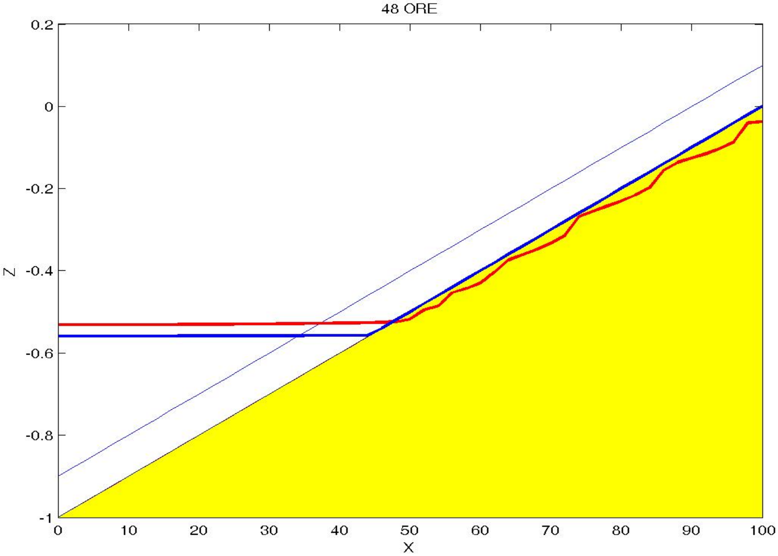
Volume = 112.74



Volume = 113.00



Volume = 113.13



Come ovviare?

Un modo semplice e ovvio per ovviare a questo inconveniente, può essere quello di ridurre il passo di integrazione temporale Δt. Una analisi di tale limitazione sul passo temporale è stata condotta in

G.S. Stelling, S.P.A. Duynmeyer
A staggered conservative scheme for every Froude number
in rapidly varied shallow water flows
Int. J. for Numerical Methods in Fluids **43** (2003) 1329–1354.

Tuttavia, questa soluzione al problema spesso determina severe restrizioni sul passo temporale. Questo è assai limitante ove si ricerchino, ad esempio, solo configurazioni di equilibrio.

Alternativa

Definendo $H_i^\ell = \max(h_i + \eta_i^\ell, 0)$, che è consistente con il problema continuo, possiamo ridefinire il metodo di discretizzazione come segue

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{\Delta t}\left(H_i^{\ell+1} - H_i^\ell\right) \quad - \quad & \frac{K}{\Delta x^2}\left[H^\ell_{i+\frac{1}{2}}\left(\eta_{i+1}^{\ell+1} - \eta_i^{\ell+1}\right)\right. \\
& \left. - H^\ell_{i-\frac{1}{2}}\left(\eta_i^{\ell+1} - \eta_{i-1}^{\ell+1}\right)\right] = \varphi_i^{\ell+1}, \\
& \qquad\qquad i \in \Omega^\ell.
\end{aligned}
$$

Così facendo, oltre al bilancio di massa, è automaticamente preservata la positività della soluzione discreta.
Conseguentemente, non vi sono più restrizioni sul passo temporale, se non per mere ragioni di accuratezza.

Forma vettoriale

In analogia con il caso precedente, si ottiene

$$\max(\mathbf{h}+\boldsymbol{\eta}^{\ell+1},0)+T^{\ell}\boldsymbol{\eta}^{\ell+1}=\max(\mathbf{h}+\boldsymbol{\eta}^{\ell},0)+\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\ell+1},$$

dove la matrice T^{ℓ} è:

- T1: Stieltjes (matrice con inversa positiva);
- T2: ovvero $\texttt{null}(T^{\ell})=\texttt{span}(\mathbf{v})$ con $\mathbf{v}>0$ e, inoltre, $T^{\ell}+D$ è Stieltjes, per ogni matrice diagonale $D\geq 0$, $D\neq 0$.

Pertanto, ponendo $\mathbf{x}=\mathbf{h}+\boldsymbol{\eta}^{\ell+1}$, $\mathbf{b}=\max(\mathbf{h}+\boldsymbol{\eta}^{\ell},0)+\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\ell+1}+T^{\ell}\mathbf{h}$, e trascurando l'indice ℓ, ad ogni passo si deve risolvere un problema del tipo:

$$\max(\mathbf{x},0)+T\mathbf{x}=\mathbf{b},$$

con T soddisfacente T1 o T2.

Problema di Complementarietà Lineare

Per risolvere il precedente problema, ponendo $\mathbf{y} = \max(\mathbf{x}, 0)$ e $\mathbf{s} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ si ottiene

$$(I + T)\mathbf{y} = T\mathbf{s} + \mathbf{b},$$

da cui, definendo $M = (I + T)^{-1}T$ e $\mathbf{q} = (I + T)^{-1}\mathbf{b}$, si perviene, infine, ad un problema di complementarietà lineare in forma standard:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= M\mathbf{s} + \mathbf{q}, \\ \mathbf{y}^T\mathbf{s} &= 0, \\ \mathbf{y}, \mathbf{s} &\geq 0. \end{aligned}$$

Metodi a punti interni

- Per risolvere il problema complementarietà lineare così ottenuto si applica qualche variante del metodo di Newton alle equazioni

$$\mathbf{y} = M\mathbf{s} + \mathbf{q}, \qquad \mathbf{y} \circ \mathbf{s} = \mathbf{0},$$

  cercando, al contempo, di soddisfare il vincolo di nonnegatività delle componenti dei vettori **y** e **s**;

- la dimensione dello spazio è pertanto raddoppiata;

- la convergenza si ottiene, in genere, nel limite di infinite iterazioni.

Piecewise Linear System

In alternativa, definendo la matrice diagonale $P(\mathbf{x})$ con elementi diagonali

$$p_i(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i > 0, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

si vede facilmente che $\quad P(\mathbf{x})\mathbf{x} = \max(\mathbf{x}, 0).$
Pertanto, il problema può essere riscritto come:

$$[P(\mathbf{x}) + T]\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Essendo la matrice $P(\mathbf{x})$ una funzione costante a tratti della soluzione medesima, si parlerà di un sistema lineare a tratti o piecewise linear system (PLS).

Risoluzione iterativa

Per la risoluzione del problema proposto,

$$[P(\mathbf{x}) + T]\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

sebbene $P(\mathbf{x})$ non sia ovunque differenziabile, è pensabile l'utilizzo di un metodo tipo Newton che, a partire da una approssimazione iniziale $\mathbf{x}^0$, e ponendo $P^k = P(\mathbf{x}^k)$, genera la successione:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - (P^k + T)^{-1}[(P^k + T)\mathbf{x}^k - \mathbf{b}], \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Esso si riduce alla seguente iterazione di Picard:

$$(P^k + T)\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{b}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

da cui si evince come, più che assegnare $\mathbf{x}^0$, si debba invece assegnare la matrice P^0.

Requisiti per l'iterazione

Per poter implementare efficientemente l'iterazione

$$(P^k + T)\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{b}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

devono essere chiariti i seguenti punti:

- ben posizione di ciascuna iterazione, ovvero la nonsingolarità della matrice $(P^k + T)$;
- definizione di un idoneo criterio di arresto;
- convergenza alla soluzione;
- unicità della stessa.

Ben posizione dell'iterazione

Teorema 1. Si assuma che la matrice T soddisfi la proprietà T1 o T2. Se T soddisfa T2, si assuma, inoltre, che:

i) $P^0 \neq O$;

ii) $\mathbf{v}^T\mathbf{b} > 0$.

Allora la matrice $(P^k + T)$ risulta essere sempre nonsingolare.

Osservazione 1. La condizione ii) ha un preciso significato fisico: $\mathbf{v}^T\mathbf{b}$ altro non è che la quantità di acqua che rimane nell'acquifero alla fine del passo temporale (pertanto, deve rimanerne almeno una goccia ...).

Osservazione 2. Trattandosi di un sistema lineare sparso di grandi dimensioni, la risoluzione del sistema lineare ad ogni iterazione può essere efficientemente ottenuta mediante un metodo iterativo: il metodo del Gradiente Coniugato Precondizionato [2].

[2] L.Brugnano, C.Magherini. *Metodi Iterativi per Sistemi Lineari*, Pitagora Editrice, 2002.

Criterio di arresto

L'iterazione ammette un criterio di arresto esatto e non approssimato.

Teorema 2. Se per un dato indice $K > 0$ si ottiene $P^K = P^{K+1}$, allora $\mathbf{x}^{K+1}$ è soluzione esatta del problema.

Dimostrazione. Immediata:

$$(P^K + T)\mathbf{x}^{K+1} = (P^{K+1} + T)\mathbf{x}^{K+1} = \mathbf{b}$$

e, pertanto, $\mathbf{x}^{K+1}$ è soluzione.

Osservazione. Questo criterio di arresto permette di ottenere, anche in aritmetica finita, il bilancio di massa che la teoria prevede.

Convergenza dell'iterazione

L'iterazione è caratterizzata da una notevole proprietà di monotonia.

Teorema 3. Si assuma che la matrice T soddisfi la proprietà T1 o T2. Se T soddisfa T2, si assuma, inoltre, che:

i) $P^0 \neq O$;

ii) $\mathbf{v}^T \mathbf{b} > 0$.

Allora $\mathbf{x}^{k+1} \leq \mathbf{x}^k,\ k = 1, 2, \ldots$. Conseguentemente, $P^{k+1} \leq P^k$.

Corollario. L'iterazione converge in al più $n + 1$ iterazioni.

Dimostrazione. Ad ogni iterazione, $P^{k+1} \leq P^k$ e $P^{k+1} = P^k$ implica che $\mathbf{x}^{k+1}$ è soluzione.

Osservazione. In realtà, la convergenza si ha in pochissime iterazioni, anche quando n è assai grande.

Unicità della soluzione

Valgono i seguenti risultati.

Teorema 4. Se T soddisfa T1, la soluzione è unica.

Teorema 5. Se T soddisfa T2, allora:

- se $\mathbf{v}^T\mathbf{b} > 0$ la soluzione è unica;
- se $\mathbf{v}^T\mathbf{b} = 0$ esistono infinite soluzioni del tipo $\mathbf{x} - \alpha\mathbf{v}$, per ogni α sufficientemente grande;
- se $\mathbf{v}^T\mathbf{b} < 0$ la soluzione non esiste.

Osservazione. La convergenza della iterazione proposta si ha esattamente sotto le condizioni che garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione.

Problema test 1

Consideriamo un acquifero contenuto in un dominio con un fondo impermeabile descritto da un paraboloide di rivoluzione:

$$h(x,y) = h_0 \left(1 - \frac{x^2+y^2}{L^2}\right), \qquad -L \leq x, y \leq L.$$

I parametri sono:

- $\varepsilon = 0.4$
- $K = 1 \ m/sec$
- $h_0 = 10 \ m$
- $L = 10^3 \ m$

La superfice freatica iniziale sia definita da $\eta(x,y,0) \equiv 0$, cosicché il dominio iniziale è dato da:

$$\Omega(0) = \left\{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \leq L^2\right\}.$$

Un pozzo è fissato nell'origine, che pompa acqua ad un ritmo costante di $10 \ m^3/sec$.

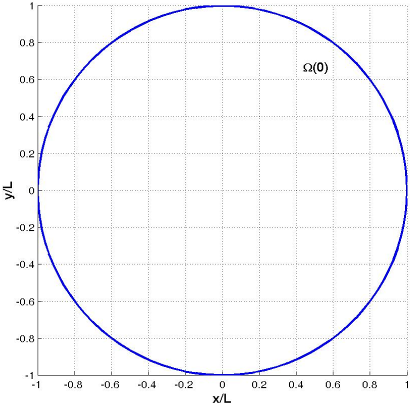
Discretizzazione

Il problema è discretizzato su un quadrato di lato $2L$, centrato nell'origine, e contenente $\Omega(0)$. Il quadrato è ricoperto con una griglia di dimensione:

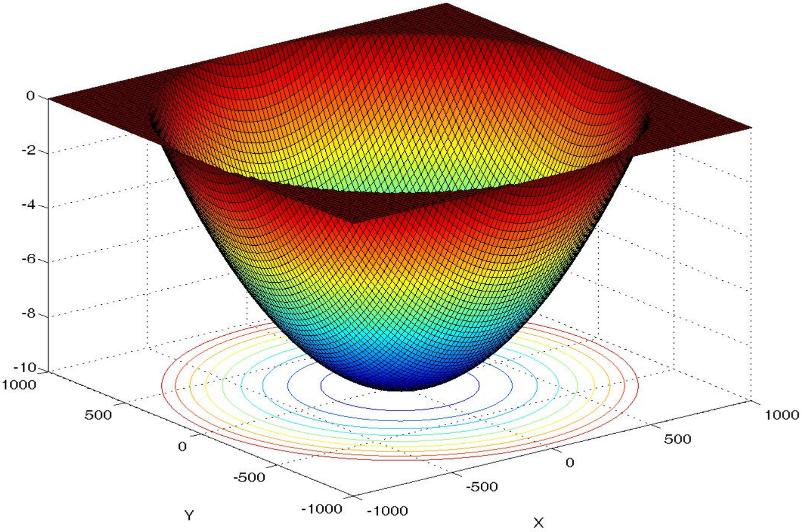
$$\Delta x = \Delta y = \frac{L}{N}.$$

Il passo temporale utilizzato è:

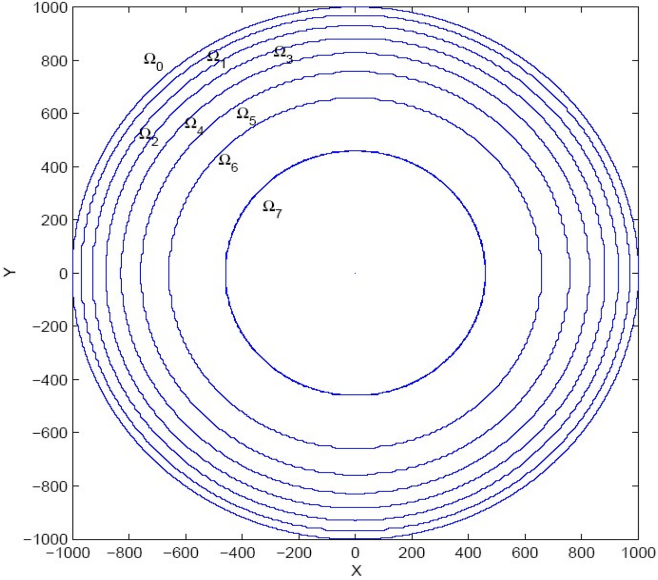
$$\Delta t = 1\,d.$$



Problema test 1



Dominio variabile nel tempo



Statistiche

		$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$	$\ell = 6$	$\ell = 7$
N=50	n_ℓ	8109	7629	7025	6345	5605	4701	3577
	K^ℓ	3	3	3	3	3	3	4
	V^ℓ	5419110	4555110	3691110	2827110	1963110	1099110	235110
N=100	n_ℓ	31965	29925	27549	24845	21853	18333	13905
	K^ℓ	3	3	3	3	3	3	4
	V^ℓ	5419173	4555173	3691173	2827173	1963173	1099173	235173
N=200	n_ℓ	126741	118693	109085	98369	86393	72449	54933
	K^ℓ	3	3	4	3	3	4	5
	V^ℓ	5419182	4555182	3691182	2827182	1963182	1099182	235182

Nota bene. Anche se i volumi sono differenti, a causa della diversa risoluzione spaziale, la differenza tra due volumi relativi a due giorni consecutivi è sempre uguale a $864,000\, m^3$, pari alla portata per un giorno.

Riferimenti

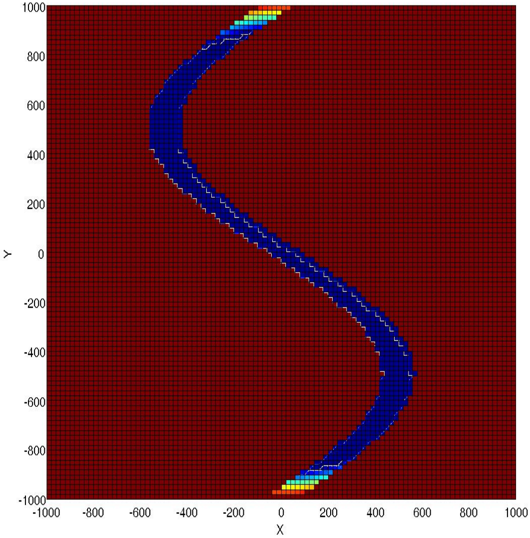
[3] L. Brugnano, V. Casulli
Iterative solution of piecewise linear systems
SIAM Jour. Sci. Comput. **30** (2008) 463–472.

Problema test 2

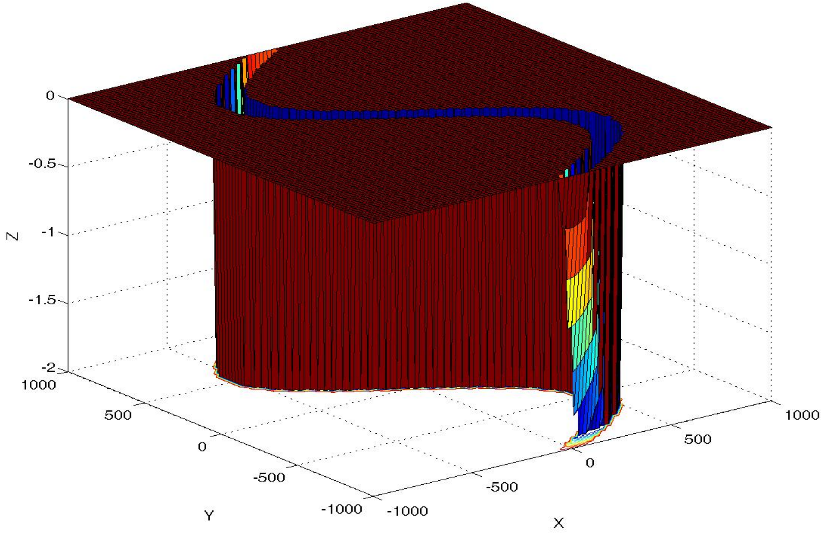
Con gli stessi parametri del problema precedente, si supponga si avere un fiume "a S", il cui livello (e falda freatica) iniziale siano nulli.

Si supponga, quindi, che il livello del fiume si abbassi istantaneamente di 2 m.

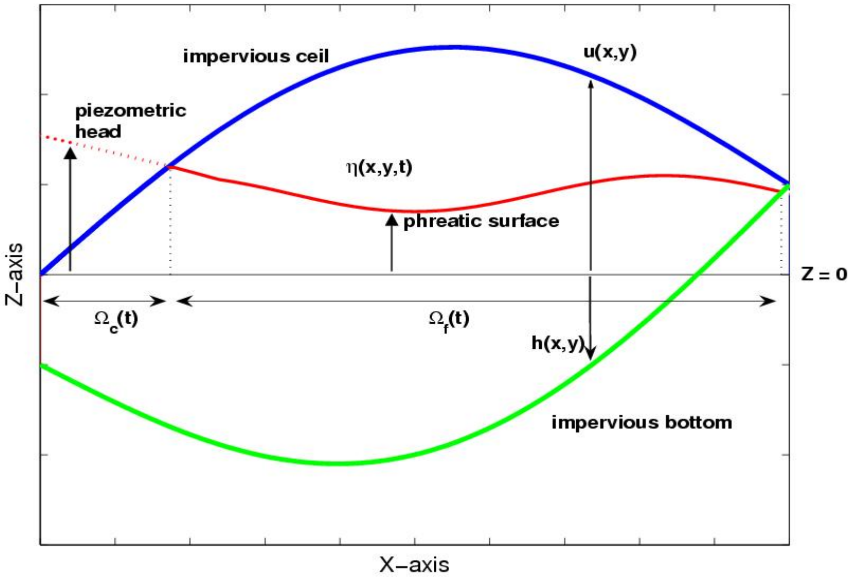
Il passo temporale utilizzato è $\Delta t = 1\ h$, per 1 d di simulazione. Fissato $N = 100$, sono necessarie, ad ogni passo temporale, al massimo 3 iterazioni.



Problema test 2



Estensioni: acquiferi confinati



Problema misto

Dominio dipendente dal tempo

$$\Omega(t) = \{(x, y) \;:\; h(x, y) + \eta(x, y, t) > 0\}$$

Parte non confinata

$$\varepsilon\eta_t = K\left([(h+\eta)\eta_x]_x + [(h+\eta)\eta_y]_y\right) + \varphi,$$

definita in $\quad \Omega_f(t) = \{(x, y) \;:\; -h(x, y) < \eta(x, y, t) < u(x, y)\}.$

Parte confinata

$$0 = K\left([(h+\eta)\eta_x]_x + [(h+\eta)\eta_y]_y\right) + \varphi,$$

definita in $\quad \Omega_c(t) = \Omega(t)\backslash\overline{\Omega}_f(t).$

Domini contigui

I due sottodomini, $\Omega_f(t)$ e $\Omega_c(t)$ sono separati dalla curva (incognita)

$$\Gamma_{fc}(t) = \{(x, y) : \eta(x, y, t) = u(x, y)\} .$$

La risoluzione di questo problema è:

- non banale, perché coinvolge due frontiere mobili (una “interna” ed una “esterna”);
- di rilievo nelle applicazioni: ad esempio, è il caso di un acquifero confinato che si ricarica (*bounded recharging aquifer [4]*)

[4] L. Li, D.A. Lockington, D.A. Barry, J.-Y. Parlange, P. Perrochet. Confined-unconfined flow in a horizontal aquifer. *Jour. of Hydrology* **271** (2003) 150–155.

Modellizzazione (per semplicità, nel caso 1D)

Definendo:

$$H_i^\ell = \max\left\{0,\ \min\left\{h_i + \eta_i^\ell,\ h_i + u_i\right\}\right\},$$

Si verifica facilmente che una discretizzazione consistente con entrambi i sottoproblemi risulta essere data da:

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t}\left(H_i^{\ell+1} - H_i^\ell\right) \quad - \quad \frac{K}{\Delta x^2}\Big[H^\ell_{i+\frac{1}{2}}\left(\eta_{i+1}^{\ell+1} - \eta_i^{\ell+1}\right)$$
$$-H^\ell_{i-\frac{1}{2}}\left(\eta_i^{\ell+1} - \eta_{i-1}^{\ell+1}\right)\Big] = \varphi_i^{\ell+1}, \qquad i \in \Omega^\ell.$$

Anche in questo caso, si può dimostrare che questa equazione definisce, nel discreto, un bilancio di massa, per cui la massa del fluido viene esattamente conservata ad ogni passo temporale.

Forma vettoriale

In analogia con il caso precedente, si ottiene:

$$\max(0, \min(\mathbf{h}+\boldsymbol{\eta}^{\ell+1}, \mathbf{h}+\mathbf{u})) + T^{\ell}\boldsymbol{\eta}^{\ell+1} = \max(0, \min(\mathbf{h}+\boldsymbol{\eta}^{\ell}, \mathbf{h}+\mathbf{u})) + \hat{\varphi}^{\ell+1},$$

dove la matrice T^{ℓ} è T1 o T2.

Pertanto, ponendo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{h} + \boldsymbol{\eta}^{\ell+1}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{h} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{b} = \max(0, \min(\mathbf{h} + \boldsymbol{\eta}^{\ell}, \mathbf{U})) + \hat{\varphi}^{\ell+1} + T^{\ell}\mathbf{h},$$

e trascurando l'indice ℓ, ad ogni passo si deve risolvere un problema del tipo:

$$\max(0, \min(\mathbf{x}, \mathbf{U})) + T\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

con T soddisfacente T1 o T2.

Piecewise Linear System

Definendo le matrici diagonali $P(\mathbf{x})$ e $Q(\mathbf{x})$, con elementi diagonali rispettivamente dati da:

$$p_i(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \geq 0, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases} \quad q_i(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i > U_i, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

si vede facilmente che

$$[P(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{x})]\,\mathbf{x} + Q(\mathbf{x})\mathbf{U} = \max(0, \min(\mathbf{x}, \mathbf{U})).$$

Pertanto, il problema può essere anche ora riscritto come un PLS:

$$P(\mathbf{x})\mathbf{x} - Q(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{U}) + T\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Iterazioni a doppio livello

È possibile definire due iterazioni "annidate", per le quali è possibile dimostrare:

- la ben posizione di ciascuna iterazione, ovvero la nonsingolarità della corrispondente matrice dei coefficienti;
- l'esistenza di un idoneo criterio di arresto per entrambi i livelli;
- la convergenza ad una soluzione in un numero finito di passi;
- la convergenza ad una soluzione si ha anche quando manca l'unicità della stessa (in questo caso, è possibile ottenere, da questa, anche tutte le altre).

Iterazione "primale"

Ponendo $P^k = P(\mathbf{x}^k)$ e $Q^k = Q(\mathbf{x}^k)$, si ha:

Iterazione esterna

$$Q^0 = O, \qquad P^k\mathbf{x}^k - Q^{k-1}(\mathbf{x}^k - \mathbf{U}) + T\mathbf{x}^k = \mathbf{b}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Ponendo, invece, $P^{k,\nu} = P(\mathbf{x}^{k,\nu})$:

Iterazione interna

$$P^{k,0} = I, \qquad P^{k,\nu-1}\mathbf{x}^{k,\nu} - Q^{k-1}(\mathbf{x}^{k,\nu} - \mathbf{U}) + T\mathbf{x}^{k,\nu} = \mathbf{b}, \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

È altresì possibile definire una corrispondente iterazione "duale".

Riferimenti

[5] L. Brugnano, V. Casulli
Iterative solution of piecewise linear systems and application to flows in porous media
SIAM Jour. Sci. Comput. **31** (2009) 1858–1873.

Problema test 3

Consideriamo un acquifero contenuto in un dominio con un fondo ed un tetto impermeabili descritti da un paraboloide di rivoluzione:

$$h(x,y) \equiv u(x,y) = h_0 \left(1 - \frac{x^2+y^2}{L^2}\right), \qquad -L \le x, y \le L.$$

I parametri sono:

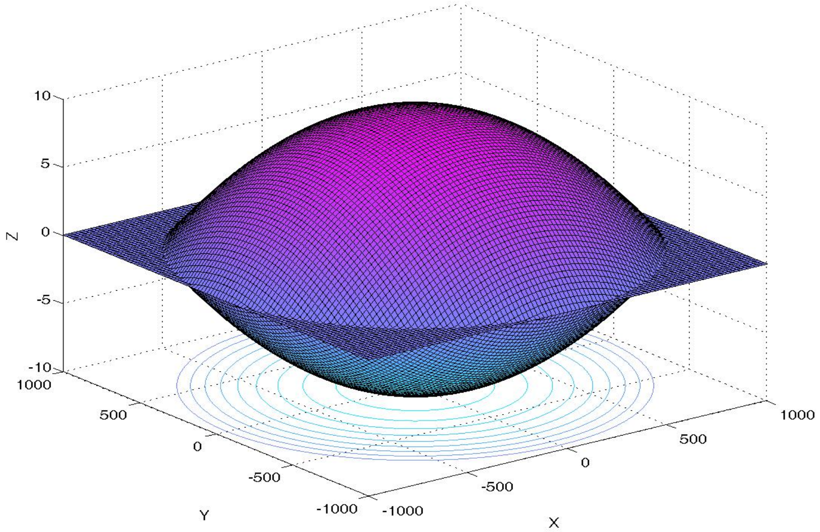
- $\varepsilon = 0.4$
- $K = 1 \; m/sec$
- $h_0 = 10 \; m$
- $L = 10^3 \; m$

La superfice freatica iniziale sia definita da $\eta(x,y,0) \equiv u(x,y)$, cosicché il dominio iniziale è dato da:

$$\Omega(0) = \left\{(x,y) \; : \; x^2 + y^2 \le L^2\right\}.$$

Un pozzo è fissato nell'origine, che pompa acqua ad un ritmo costante di $10 \; m^3/sec$.

Problema test 3



$\Delta t = 1\, d$, $\Delta x = \Delta y = 2L/N$

	$N=50$				$N=100$				$N=200$			
ℓ	k_{out}	ν_{tot}	n_ℓ	V_ℓ	k_{out}	ν_{tot}	n_ℓ	V_ℓ	k_{out}	ν_{tot}	n_ℓ	V_ℓ
0	-	-	-	12564992	-	-	-	12566221	-	-	-	12566346
1	5	5	2085	11700992	5	5	8109	11702221	5	5	31965	11702346
2	3	3	2085	10836992	4	4	8109	10838221	4	4	31965	10838346
3	3	3	2085	9972992	3	3	8109	9974221	3	3	31965	9974346
4	3	3	2085	9108992	3	3	8109	9110221	3	3	31965	9110346
5	2	2	2085	8244992	3	3	8109	8246221	3	3	31965	8246346
6	3	3	2085	7380992	3	3	8109	7382221	3	3	31965	7382346
7	3	3	2085	6516992	3	3	8109	6518221	3	3	31965	6518346
8	2	5	2085	5652992	2	5	8109	5654221	2	6	31965	5654346
9	1	2	2025	4788992	1	3	7793	4790221	1	3	30597	4790346
10	1	3	1877	3924992	1	3	7177	3926221	1	3	28177	3926346
11	1	3	1693	3060992	1	3	6533	3062221	1	3	25621	3062346
12	1	3	1509	2196992	1	3	5797	2198221	1	3	22689	2198346
13	1	3	1297	1332992	1	3	4929	1334221	1	3	19349	1334346
14	1	4	1033	468992	1	4	3909	470221	1	4	15249	470346

Nota bene. Anche se i volumi sono differenti, a causa della diversa risoluzione spaziale, la differenza tra due volumi relativi a due giorni consecutivi è sempre uguale a $864,000\, m^3$, pari alla portata per un giorno.

Estensioni ulteriori

Acquiferi

Altre situazioni di interesse fisico sono modellizzabili con opportuni piecewise linear systems:

- dighe in terra;
- acquiferi artesiani;
- ...

...ma questa è un'altra storia.