

Hamiltonian Boundary Value Methods per la corretta risoluzione numerica di problemi Hamiltoniani

Luigi Brugnano

Università di Firenze, Italy

<http://www.math.unifi.it/~brugnano>

In collaborazione con Felice Iavernaro e Donato Trigiante

Overview

- Sistemi dinamici Hamiltoniani
- Conservazione di invarianti e integrali di linea
- Integrali di linea discreti
- Hamiltonian BVMs (HBVMs)
- Proprietà degli HBVMs
- Esempi numerici
- Conclusioni

Problemi Hamiltoniani in forma canonica

Questi problemi hanno un ruolo importante in molti ambiti, che spaziano dalla macroscala della dinamica celeste, alla microscala della dinamica molecolare:

$$y' = J \nabla H(y), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^{2m},$$

in cui

$$J = \begin{pmatrix} & I_m \\ -I_m & \end{pmatrix},$$

ovvero, partizionando $y = (q, p)^T$,

$$q' = H_p(q, p), \quad p' = -H_q(q, p),$$

con $H(y) = H(q, p)$ la **funzione Hamiltoniana**.

Invarianti del moto

Per questi sistemi dinamici, il moto è caratterizzato dalla presenza di **invarianti** (e.g., i suoi integrali primi), tra i quali l'Hamiltoniana stessa:

$$\begin{aligned} H(y(t)) - H(y_0) &= \int_0^t \nabla H(y(\tau))^T y'(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \nabla H(y(\tau))^T J \nabla H(y(\tau)) d\tau = 0, \end{aligned}$$

poiché la matrice J è **antisimmetrica**.

Nel seguito, assumeremo che $H(y)$ sia un **polinomio di grado ν** .

Integrali di Linea

Per ogni $y^* \in \mathbb{R}^{2m}$, è noto che

$$H(y^*) - H(y_0) = h \int_0^1 \sigma'(\tau h)^T \nabla H(\sigma(\tau h)) d\tau,$$

in cui $\sigma : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ è una qualunque funzione derivabile tale che

$$\sigma(0) = y_0, \quad \sigma(h) = y^*.$$

In particolare, considereremo il caso in cui $\sigma(t)$ è un polinomio di **grado s** che fornisce una approssimazione della soluzione, $y(t)$, nell'intervallo $[0, h]$.

Integrali di Linea Discreti

Consideriamo le s **ascisse**

$$0 < c_1 < \dots < c_s \leq 1,$$

e imponiamo che $\sigma(t)$ interpoli la soluzione (incognita),

$$\sigma(c_i h) = y_i, \quad i = 1, \dots, s.$$

Si ottiene, quindi, l'**approssimazione**

$$\begin{aligned} H(\sigma(h)) - H(y_0) &= h \int_0^1 \sigma'(\tau h)^T \nabla H(\sigma(\tau h)) dt \\ &= h \sum_{i=1}^s b_i \sigma'(c_i h)^T \nabla H(\sigma(c_i h)) + R_s, \end{aligned}$$

con
$$b_i = \int_0^1 \prod_{j=1, j \neq i}^s \frac{t - c_j}{c_i - c_j} dt, \quad i = 1, \dots, s.$$

Conservazione dell'Hamiltoniana

Per conservare l'Hamiltoniana nel punto finale, dobbiamo risolvere i seguenti problemi:

Esattezza della quadratura:

$$R_s = 0,$$

cosicché

$$\int_0^1 \sigma'(\tau h)^T \nabla H(\sigma(\tau h)) d\tau = \sum_{i=1}^s b_i \sigma'(c_i h)^T \nabla H(\sigma(c_i h)).$$

Integrale di linea nullo:

$$\sum_{i=1}^s b_i \sigma'(c_i h)^T \nabla H(\sigma(c_i h)) = 0,$$

cosicché

$$H(\sigma(h)) = H(y_0).$$

Metodi di Collocazione

Un concetto differente, sebbene correlato, è quello di **polinomio di collocazione** per il problema, sulle ascisse $\{c_i\}$, i.e., l'unico polinomio $u(t)$ di grado s tale che

$$u(0) = y_0, \quad u'(c_i h) = J \nabla H(u(c_i h)), \quad i = 1, \dots, s.$$

Per questo polinomio,

$$\begin{aligned} H(u(h)) - H(y_0) &= h \int_0^1 u'(\tau h)^T \nabla H(u(\tau h)) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^s b_i u'(c_i h)^T \nabla H(u(c_i h)) + R_s = R_s, \end{aligned}$$

per le condizioni di collocazione.

Pertanto:

si ha conservazione se e solo se $R_s = 0$.

Invarianti Quadratici

Tuttavia, la formula di quadratura è esatta per polinomi di grado al più $2s - 1$ (quando le ascisse Gaussiane sono utilizzate), mentre l'integrando ha grado

$$s - 1 + (\nu - 1)s = \nu s - 1.$$

Pertanto:

$$R_s = 0 \quad \implies \quad \nu \leq 2.$$

È infatti noto che i metodi di collocazione simmetrici possono al più preservare invarianti quadratici.

Domanda:

Come risolvere il problema per $\nu > 2$?

Integrale di linea esatto

Per questo fine, si dovrà ricorrere ad un approccio differente, che può essere riguardato come una **generalizzazione delle condizioni di collocazione** che, nella loro formulazione originaria, risultano essere troppo restrittive, per poter garantire anche l'esattezza della discretizzazione dell'integrale di linea.

$$\int_0^1 \sigma'(\tau h)^T \nabla H(\sigma(\tau h)) d\tau = \sum_{i=1}^s \beta_i \sigma'(c_i h)^T \nabla H(\sigma(c_i h)) + \sum_{i=1}^r \hat{\beta}_i \sigma'(\hat{c}_i h)^T \nabla H(\sigma(\hat{c}_i h)),$$

con $\{\beta_i\}$, e $\{\hat{\beta}_i\}$, che denotano i pesi della quadratura definita sulle ascisse $\{c_i\} \cup \{\hat{c}_i\}$:

$$\beta_i = \int_0^1 \left(\prod_{j=1, j \neq i}^s \frac{t - c_j}{c_i - c_j} \right) \left(\prod_{j=1}^r \frac{t - \hat{c}_j}{c_i - \hat{c}_j} \right) dt, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$\hat{\beta}_i = \int_0^1 \left(\prod_{j=1}^s \frac{t - c_j}{\hat{c}_i - c_j} \right) \left(\prod_{j=1, j \neq i}^r \frac{t - \hat{c}_j}{\hat{c}_i - \hat{c}_j} \right) dt, \quad i = 1, \dots, r.$$

Stadi Silenti

Definendo gli **stadi silenti**

$$\hat{Y}_i \equiv \sigma(\hat{c}_i h), \quad i = 1, \dots, r,$$

otteniamo che il polinomio σ , che ha grado s , interpola la soluzione discreta in

$$k = s + r \quad (+1)$$

punti.

Integrale di linea esatto

Il numero degli stadi silenti può essere scelto arbitrariamente, fino ad ottenere una **discretizzazione esatta dell'integrale di linea**. Pertanto,

$$R_s = 0.$$

Rimangono da imporre le condizioni affinché esso si annulli.

Integrale di linea esatto

Si consideri il seguente sviluppo di $\sigma'(\tau h)$:

$$\sigma'(\tau h) = \sum_{j=1}^s \gamma_j P_j(\tau),$$

da cui

$$\sigma(\tau h) = y_0 + h \sum_{j=1}^s \gamma_j \int_0^{\tau} P_j(x) dx,$$

in cui $\{P_j(t)\}$ sia una opportuna base per Π_{s-1} , e i coefficienti $\{\gamma_j\}$ sono da determinare in modo tale che l'**integrale di linea si annulli**.

Conservazione dell'Hamiltoniana

Introducendo le ascisse

$$\{\tau_1, \dots, \tau_k\} = \{c_1, \dots, c_s\} \cup \{\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_r\},$$

si ottiene che

$$H(\sigma(h)) = H(y_0)$$

se e solo se, ridenominando $\{b_i\} = \{\beta_i\} \cup \{\hat{\beta}_i\}$,

$$\sum_{i=1}^k b_i \sigma'(\tau_i h)^T \nabla H(\sigma(\tau_i h)) = 0,$$

ovvero,

$$\sum_{j=1}^s \gamma_j^T \sum_{i=1}^k b_i P_j(\tau_i) \nabla H(\sigma(\tau_i h)) = 0.$$

Condizioni di Ortogonalità

L'integrale di linea discreto si annullerà se:

$$\gamma_j = \eta_j J \sum_{i=1}^k b_i P_j(\tau_i) \nabla H(\sigma(\tau_i h)), \quad j = 1, \dots, s.$$

Che portano alle seguenti condizioni di **collocazione generalizzate**:

$$\begin{aligned} \sigma'(\tau_i h) &= \sum_{j=1}^s \eta_j P_j(\tau_i) \sum_{\ell=1}^k b_\ell P_j(\tau_\ell) J \nabla H(\sigma(\tau_\ell h)) \\ &= \sum_{j=1}^s \eta_j P_j(\tau_i) \int_0^1 P_j(\tau) J \nabla H(\sigma(\tau h)) d\tau, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Il caso $k = s$

Quando $k = s$, ovvero quando **non vi sono stadi silenti** (e, quindi, l'Hamiltoniana $H(y)$ è al più quadratica), scegliendo i polinomi di base $\{P_i(x)\}$ come i **polinomi di Lagrange sulle ascisse** $\{c_1, \dots, c_s\}$, si ottiene, ponendo $\eta_j = b_j^{-1}$, $j = 1, \dots, s$,

$$\sigma'(c_i h) = J \nabla H(\sigma(c_i h)), \quad i = 1, \dots, s,$$

che sono le classiche condizioni di collocazione.

Nel seguito, considereremo, come base polinomiale, quella dei **polinomi di Legendre shiftati sull'intervallo** $[0, 1]$, che costituiscono una famiglia di polinomi ortogonali su tale intervallo. Per essi, si ottiene:

$$\eta_j = 2j - 1, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Master Functional Equation

Dall'equazione

$$\sigma'(ch) = \sum_{j=1}^s \eta_j P_j(c) \int_0^1 P_j(\tau) J \nabla H(\sigma(\tau h)) d\tau,$$

introducendo l'operatore

$$L(f; h)\sigma(ch) = \sigma(0) + h \sum_{j=1}^s \eta_j \int_0^c P_j(x) dx \int_0^1 P_j(\tau) f(\sigma(\tau h)) d\tau,$$

si ottiene, infine, che

$$\sigma = L(J \nabla H; h)\sigma.$$

Ovvero σ è autofunzione di $L(J \nabla H; h)$, relativo all'autovalore $\lambda = 1$.

Questa è la **Master Functional Equation** che definisce σ .

Se i pesi $\{\eta_j\}$ non dipendono dalle ascisse scelte, tale equazione è **indipendente dalle ascisse considerate**.

HBVM(k, s)

In definitiva, il metodo proposto è caratterizzato dai seguenti parametri:

Grado s

del polinomio $\sigma(t)$ che definisce la soluzione discreta

Numero di passi k

che rendono l'integrale di linea discreto uguale all'integrale di linea continuo (dando, così la conservazione)

Essi definiscono un **Hamiltonian BVM** a k passi e **grado s** . In breve: **HBVM(k, s)**.

BVM a blocchi

La denominazione HBVM discende dal fatto che, come vedremo, tali metodi possono essere derivati nell'ambito dei **Block Boundary Value Methods**

L. Brugnano, D. Trigiante

Solving Differential Problems by Multistep Initial and Boundary Value Methods

Gordon and Breach Science Publ., Amsterdam, 1998.

Scelta dei nodi

Scegliendo i nodi τ_1, \dots, τ_k alle **ascisse Gaussiane**, si ottiene una formula di quadratura che è esatta per polinomi di grado $2k - 1$. Pertanto, si otterrà conservazione per ogni Hamiltoniana di grado

$$\nu \leq \frac{2k}{s}.$$

Per Hamiltoniane di grado più elevato (o non polinomiali, ma sufficientemente regolari), l'errore nel singolo passo di integrazione sarà $O(h^{2k+1})$.

Inoltre, questa scelta (simmetrica) delle ascisse, fa sì che il metodo numerico sia, a sua volta, un **metodo simmetrico**.

Proprietà degli HBVM

Il seguente Teorema riassume le proprietà salienti degli HBVM, per una generica scelta delle ascisse.

Teorema

Se le ascisse $\{\tau_i\}$ definiscono una formula di quadratura di ordine $\psi \geq 2s$, allora un HBVM(k, s):

- ha ordine di convergenza $2s$;
- conserva l'energia per Hamiltoniane polinomiali di grado $\nu \leq \psi/s$;
- per Hamiltoniane sufficientemente regolari, l'errore nell'energia ad ogni passo è $O(h^{\psi+1})$;
- è **perfettamente A-stabile**;
- con la scelta delle ascisse Gaussiane (o quelle di Lobatto), $\psi = 2k$.

Formulazione RK di un HBVM

Definendo:

$$y_i = \sigma(\tau_i h), \quad f_i = J\nabla H(y_i), \quad i = 1, \dots, k,$$

la discretizzazione della Master Functional Equation fornisce le equazioni:

$$\begin{aligned} y_i &= y_0 + h \sum_{j=1}^s (2j-1) \int_0^{\tau_i} P_j(x) dx \sum_{\ell=1}^k b_\ell P_j(\tau_\ell) f_\ell \\ &= y_0 + h \sum_{j=1}^k b_j \left(\sum_{\ell=1}^s (2\ell-1) \int_0^{\tau_i} P_\ell(x) dx \right) P_j(\tau_j) f_j \\ &\equiv y_0 + h \sum_{j=1}^k a_{ij} f_j, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Tableau di Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} \tau_1 & a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_k & a_{k1} & \dots & a_{kk} \\ \hline & b_1 & \dots & b_k \end{array}$$

La matrice (a_{ij}) ha dimensione k e rango s .

Formulazione come BVM a blocchi

Alternativamente (come fatto nell'approccio originale), si può discretizzare la Master Functional Equation solo su s ascisse (per semplicità, siano queste le prime s):

$$y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^s (2j-1) \int_0^{\tau_i} P_j(x) dx \sum_{\ell=1}^k b_\ell P_j(\tau_\ell) f_\ell, \quad i = 1, \dots, s,$$

imponendo, inoltre, le $k-s$ condizioni di interpolazione per gli stadi silenti:

$$\sigma(\tau_{s+i}h) = y_{s+i}, \quad i = 1, \dots, k-s.$$

Matrix Pencil

Il problema discreto diviene, in questo caso,

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{e} & I_s & O \\ -\mathbf{a}_0 & -A_1 & I_r \end{pmatrix} \otimes I_{2m} \begin{pmatrix} y_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B_1 & B_2 \\ \mathbf{0} & O & O \end{pmatrix} \otimes I_{2m} \begin{pmatrix} f(y_0) \\ f(\mathbf{y}_1) \\ f(\mathbf{y}_2) \end{pmatrix}$$

dove:

- il vettore a blocchi \mathbf{y}_1 ha dimensione s
- mentre \mathbf{y}_2 , che contiene gli **stadi silenti**, ha dimensione $k - s$.

Sistema Nonlineare

Ricavando gli stadi silenti dalla seconda equazione,

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{a}_0 \otimes y_0 + A_1 \otimes I_{2m} \mathbf{y}_1$$

e sostituendo nella prima, si ottiene il problema discreto da risolvere:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{e} \otimes y_0 + h B_1 \otimes I_{2m} f(\mathbf{y}_1) + h B_2 \otimes I_{2m} f(\mathbf{a}_0 \otimes y_0 + A_1 \otimes I_{2m} \mathbf{y}_1)$$

Costo computazionale

La dimensione (a blocchi) è s , e non k .

Pertanto, il costo dipende, essenzialmente, solo da s !!!

Test Numerici

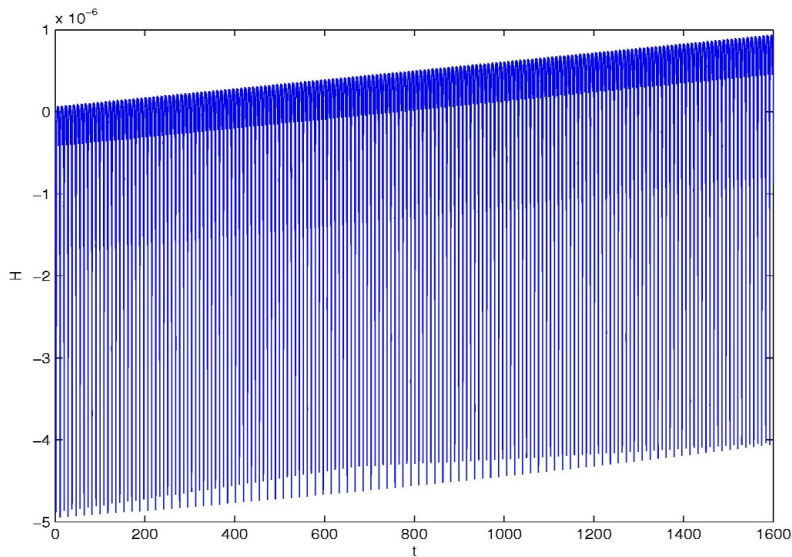
Consideriamo il problema definito dall'Hamiltoniana polinomiale di grado $\nu = 6$:

$$H(p, q) = \frac{p^3}{3} - \frac{p}{2} + \frac{q^6}{30} + \frac{q^4}{4} - \frac{q^3}{3} + \frac{1}{6}.$$

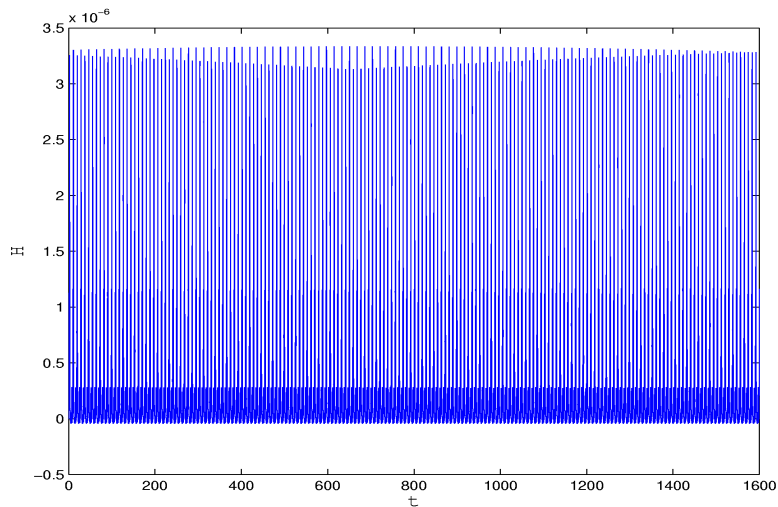
Per esso, si osserva un **drift** dell'Hamiltoniana, lungo la soluzione numerica, usando il metodo di Lobatto IIIA del quarto ordine (con passo $h = 0.16$), partendo dal punto iniziale $y_0 \equiv (q(0), p(0))^T = (0, 1)^T$.

E. Faou, E. Hairer, T.-L. Pham. Energy conservation with non-symplectic methods: examples and counter-examples. *BIT Numerical Mathematics* **44** (2004) 699–709.

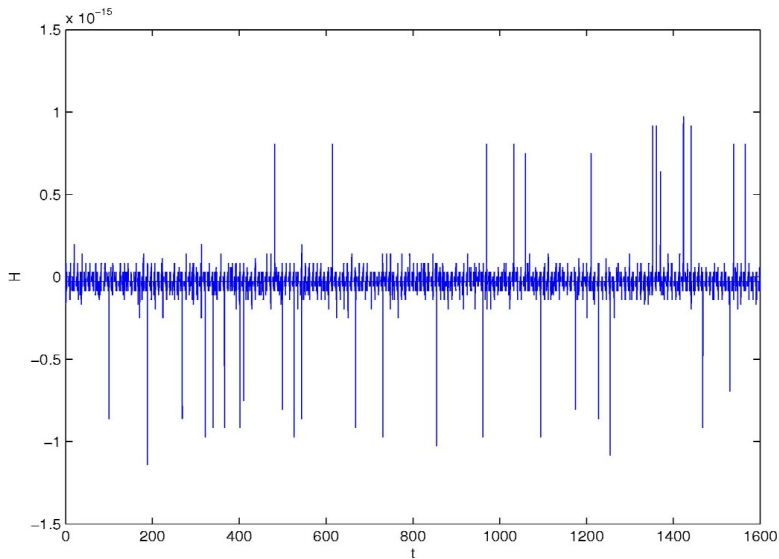
Metodo di Lobatto IIIA del quarto ordine, $h = 0.16$ (drift)



Metodo di Gauss (simplettico) del quarto ordine, $h = 0.16$



HBVM(6,2), $h = 0.16$

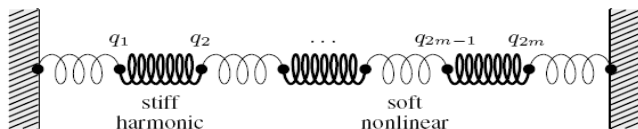


Ordine di convergenza

Stima numerica dell'ordine di convergenza su griglie dimezzate

h	0.32	0.16	0.08	0.04	0.02
err	$2.288 \cdot 10^{-2}$	$1.487 \cdot 10^{-3}$	$9.398 \cdot 10^{-5}$	$5.890 \cdot 10^{-6}$	$3.684 \cdot 10^{-7}$
ord	–	3.94	3.98	4.00	4.00

Problema di Fermi-Pasta-Ulam



Hamiltoniana di grado 4:

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (p_{2i-1}^2 + p_{2i}^2) + \frac{\omega^2}{4} \sum_{i=1}^m (q_{2i} - q_{2i-1})^2 + \sum_{i=0}^m (q_{2i+1} - q_{2i})^4,$$

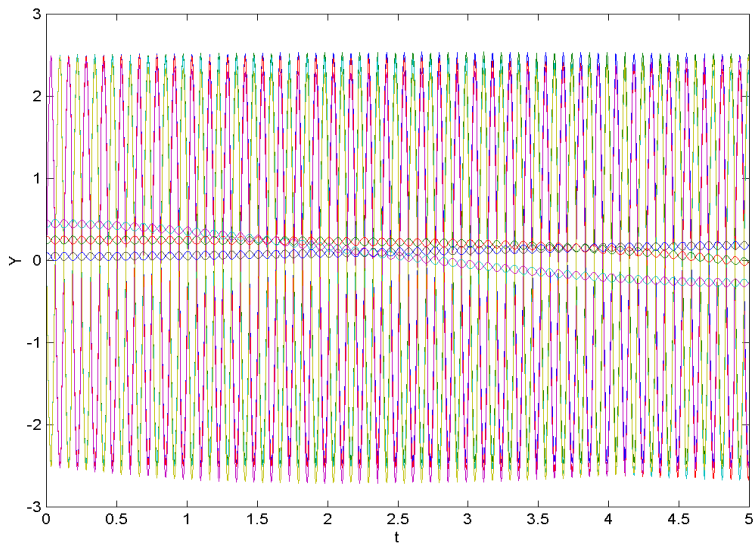
con parametri:

$$q_0 = q_{2m+1} = 0, \quad m = 3, \quad \omega = 50,$$

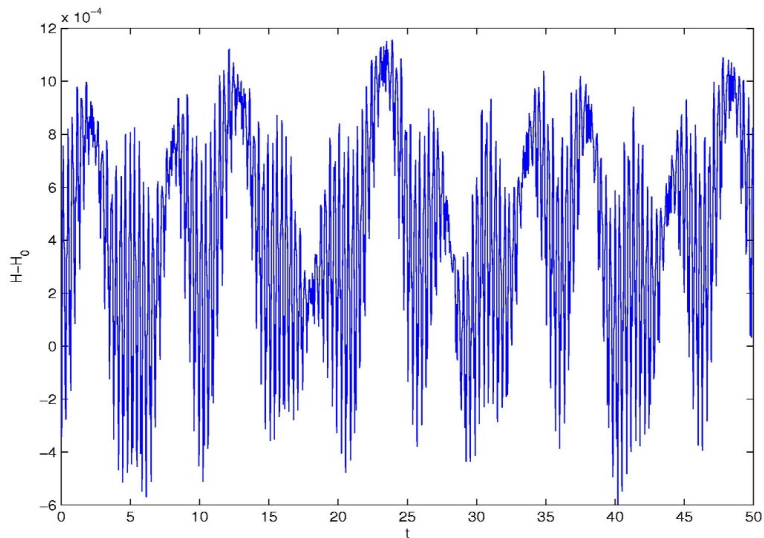
e punto iniziale:

$$p_i = 0, \quad q_i = (i - 1)/10, \quad i = 1, \dots, 6.$$

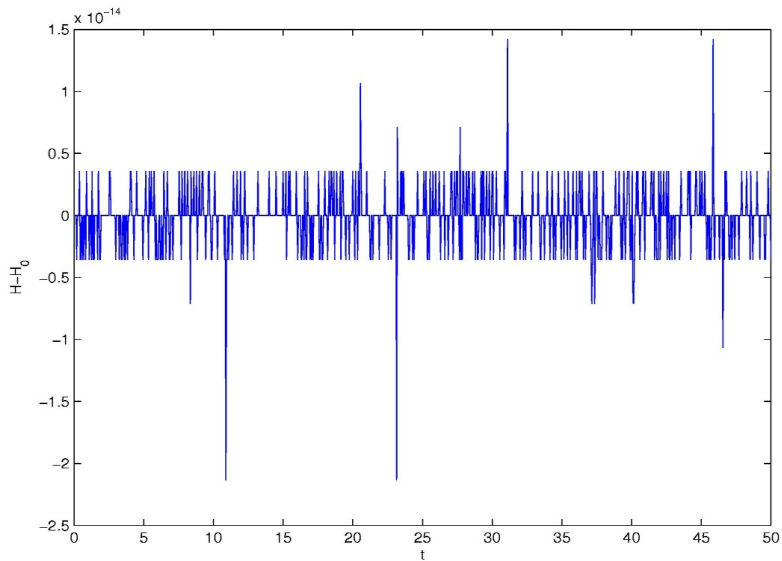
Soluzione altamente oscillante



Metodo di Lobatto IIIA, $h = 0.05$



HBVM(4,2), $h = 0.05$



Ordine di convergenza

Stima numerica dell'ordine di convergenza su griglie dimezzate

h	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}
err	3.030	$1.967 \cdot 10^{-1}$	$1.240 \cdot 10^{-2}$	$7.761 \cdot 10^{-4}$	$4.853 \cdot 10^{-5}$
ord	–	3.97	3.99	4.00	4.00

Hamiltoniane non polinomiali

Negli esempi precedenti, l'Hamiltoniana era un polinomio.

Per Hamiltoniane non polinomiali, la conservazione è solo approssimata.

Tuttavia, è evidente che un HBVM(k,s) produce una **conservazione pratica** dell'energia, quando l'errore è inferiore alla precisione di macchina.

Questo si può sempre ottenere, laddove la funzione Hamiltoniana sia localmente ben approssimata da un polinomio di grado sufficientemente elevato.

Aurora Boreale



Hamiltoniana non polinomiale

Consideriamo il **moto di una particella carica in un campo magnetico con potenziale di Biot-Savart**. Esso è definito dall'Hamiltoniana:

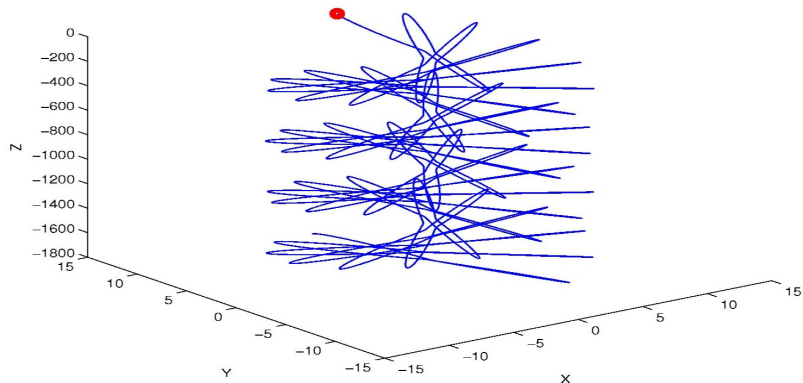
$$H(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2m} \left[\left(\dot{x} - \alpha \frac{x}{\rho^2} \right)^2 + \left(\dot{y} - \alpha \frac{y}{\rho^2} \right)^2 + (\dot{z} + \alpha \log(\rho))^2 \right],$$

con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = e B_0$, m è la massa della particella, di carica e , e B_0 è l'intensità del campo magnetico.

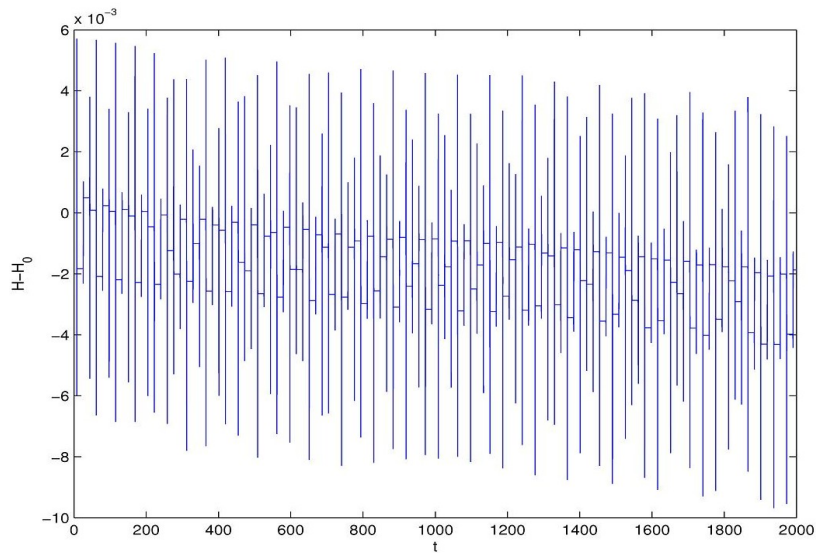
Parametri utilizzati: $m = 1$, $e = -1$, $B_0 = 1$; con punto iniziale:
 $x = 0.5$, $y = 10$, $z = 0$, $\dot{x} = -0.1$, $\dot{y} = -0.3$, $\dot{z} = 0$.

(Problema fornito dal Prof. Mario Trigiane, del Politecnico di Torino)

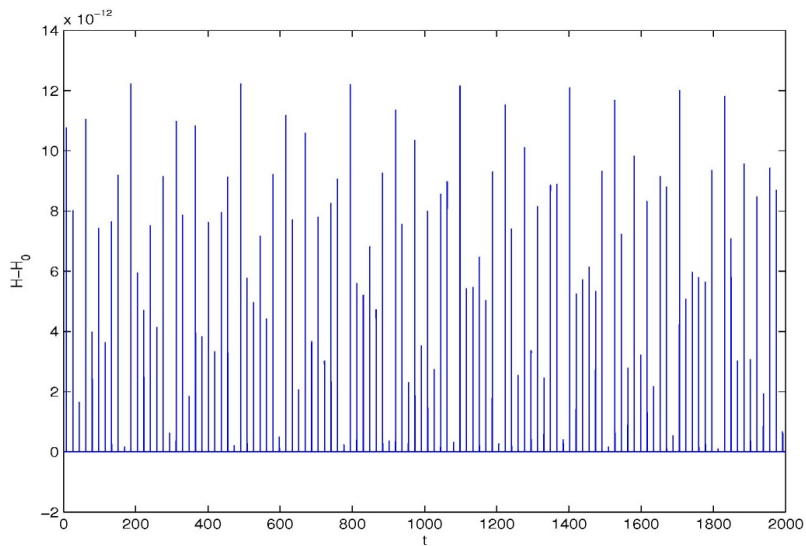
Soluzione nello spazio delle fasi



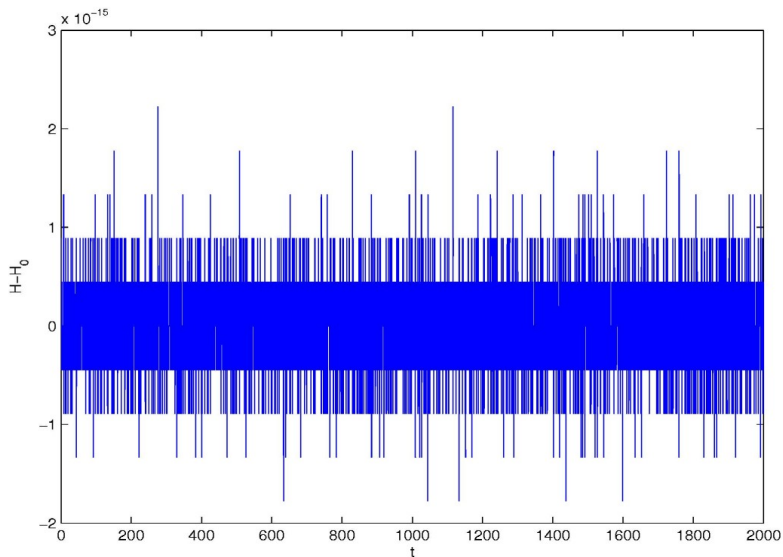
Metodo di Lobatto IIIA, $h = 0.1$



HBVM(4,2), $h = 0.1$



HBVM(6,2), $h = 0.1$



Ordine di convergenza

Pertanto, HBVM(6,2) fornisce, in questo caso, una **conservazione pratica** dell'Hamiltoniana.

Stima numerica dell'ordine di convergenza su griglie dimezzate

h	$3.2 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
err	$3.944 \cdot 10^{-6}$	$2.635 \cdot 10^{-7}$	$1.729 \cdot 10^{-8}$	$1.094 \cdot 10^{-9}$	$6.838 \cdot 10^{-11}$
ord	–	3.90	3.93	3.98	4.00

Conclusioni

Per ogni $s = 1, 2, \dots$, e $k \geq s$, gli HBVM(k, s):

- costituiscono una classe di metodi **perfettamente A-stabili**, e di ordine $2s$;
- scegliendo le ascisse τ_1, \dots, τ_k come le **ascisse Gaussiane** o, equivalentemente, le ascisse $0 = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k = 1$ come le **ascisse di Lobatto**, essi conservano esattamente Hamiltoniane polinomiali di grado $\nu \leq 2k/s$;
- una conservazione pratica dell'Hamiltoniana si ottiene, in ogni caso, per k sufficientemente elevato;
- il costo computazionale di tali metodi dipende essenzialmente da s , per cui valori di k elevati non penalizzano troppo l'efficienza computazionale;
- la ricerca è attivamente in corso ...

... ma questa è un'altra storia.

Riferimenti bibliografici

- [1] F. Iavernaro, D. Trigiante. Discrete conservative vector fields induced by the trapezoidal method. *J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math.* **1** (2006) 113–130.
- [2] F. Iavernaro, B. Pace. s -Stage Trapezoidal Methods for the Conservation of Hamiltonian Functions of Polynomial Type. *AIP Conf. Proc.* **936** (2007) 603–606.
- [3] F. Iavernaro, D. Trigiante. State-dependent symplecticity and area preserving numerical methods. *J. Comput. Appl. Math.* **205** no. 2 (2007) 814–825.
- [4] F. Iavernaro, B. Pace. Conservative Block-Boundary Value Methods for the Solution of Polynomial Hamiltonian Systems. *AIP Conf. Proc.* **1048** (2008) 888–891.
- [5] F. Iavernaro, D. Trigiante. High-order symmetric schemes for the energy conservation of polynomial Hamiltonian problems. *J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math.* **4**,1-2 (2009) 87–111.

Riferimenti bibliografici (continua)

- [6] L. Brugnano, F. Iavernaro, T. Susca. Hamiltonian BVMs (HBVMs): implementation details and applications. “Proceedings of ICNAAM 2009”, *AIP Conf. Proc.* **1168** (2009) 723–726.
- [7] L. Brugnano, F. Iavernaro, D. Trigiante. Hamiltonian BVMs (HBVMs): a family of “drift free” methods for integrating polynomial Hamiltonian problems. “Proceedings of ICNAAM 2009”, *AIP Conf. Proc.* **1168** (2009) 715–718.
- [8] L. Brugnano, F. Iavernaro, D. Trigiante. Analysis of Hamiltonian Boundary Value Methods (HBVMs): a class of energy-preserving Runge-Kutta methods for the numerical solution of polynomial Hamiltonian systems. *BIT* (submitted) [arXiv:0909.5659](https://arxiv.org/abs/0909.5659)
- [9] L. Brugnano, F. Iavernaro, D. Trigiante. Hamiltonian Boundary Value Methods (Energy Conserving Discrete Line Integral Methods). *J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math.* (submitted) [arXiv:0910.3621](https://arxiv.org/abs/0910.3621)