Nome: Corso di laurea:
Iscritto all'anno di corso:1 2 3 f.c.

Corso di Matematica, Prova scritta parziale n. 2, 25 Gennaio 2008
Corsi di laurea in Alimentari e Viticoltura ed Enologia

In ogni esercizio oltre al risultato scrivete i passaggi principali necessari per arrivare alla soluzione.

1) (7 punti) Trovare i punti critici della funzione $(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ e cercare massimi e min assoluti negli intervalli indicati sotto.

punti critici= $x = -1 \quad x = 2$

Indicare il valore massimo e quello minimo della funzione quando $x \in [-2, -0.5]$

valore massimo = 0,36 ascissa corrispondente= $x = -1$
valore minimo = 0 ascissa corrispondente= $x = -2$

Indicare il valore massimo e quello minimo della funzione quando $x \in [1, 2]$

valore massimo = 8,15 ascissa corrispondente= $x = 1$
valore minimo = 6,59 ascissa corrispondente= $x = 2$

2) (10 punti) Disegnare il grafico della seguente funzione, studiando anche la sua concavità:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$$

dominio = $\mathbb{R}$
limiti agli estremi del dominio:
$\lim_{x \to -\infty} f = 1 \quad \lim_{x \to +\infty} f = 1$

Asintoti orizzontali? $\boxed{y = 1}$ Asintoti verticali? No

f si annulla in: $x = +2$, $x = -2$ è positiva in: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ed è negativa in: $[-2, 2]$

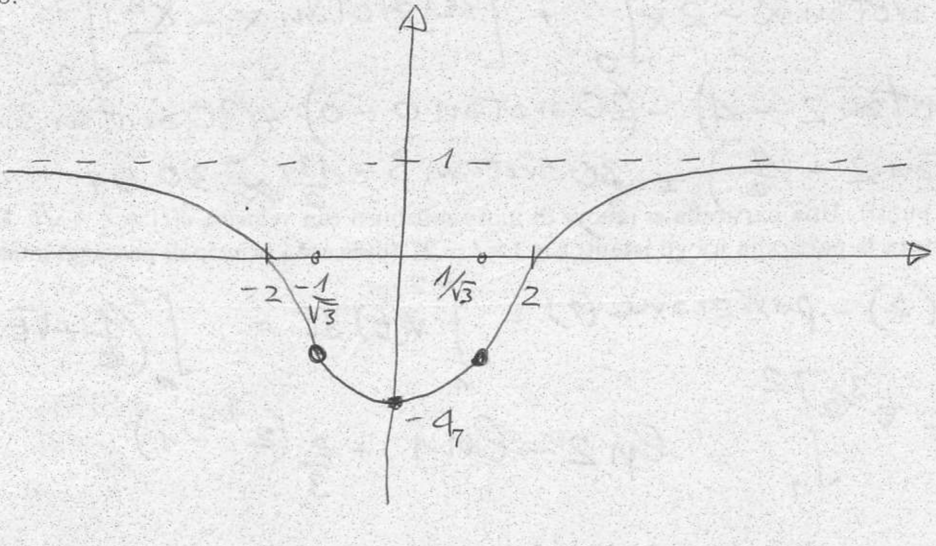
$f' = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$

f è crescente in: $[0, +\infty)$ ed è decrescente in: $(-\infty, 0]$

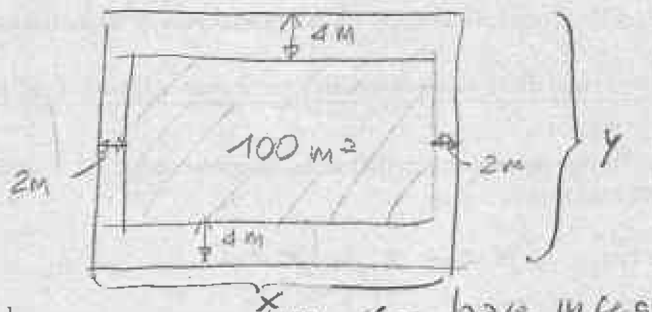
$f'' = \frac{10 - 30x^2}{(x^2+1)^3}$

f è concava verso l' alto in: $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ e verso il basso in: altrove

Grafico:



3) (6 punti) Una insegna pubblicitaria e' di forma rettangolare. La superficie stampata e' di 100 m^2 circondata da una cornice di colore diverso larga 2m in orizzontale e 4m in verticale. Determinare le dimensioni esterne dell'insegna in modo che la sua area totale (area stampata piu' cornici) sia minima



Indicare le variabili usate e che cosa esse rappresentano. $x =$ base insegna $y =$ altezza insegna

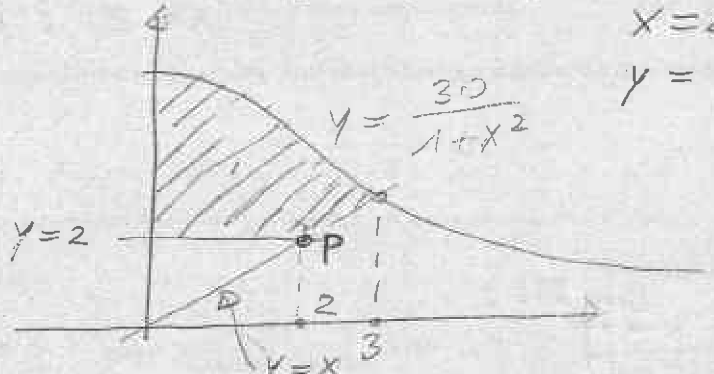
Indicare l'eventuale equazione che lega tra loro le variabili. $(x-4)(y-8)=100$

Indicare la funzione da studiare e l'intervallo in cui varia la variabile

Area insegna $= x \cdot y = x \cdot \left(8 + \frac{100}{x-4}\right)$ $\qquad 4 \leq x < +\infty$

Valore cercato (il massimo o il minimo, a seconda dell'esercizio) = il minimo si ha quando $x = 4+\sqrt{50}$ e $y = 8+2\sqrt{50}$

4) (7 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura.



Calcolo dei vari valori di x necessari per impostare l'integrale (indicare i principali passaggi intermedi): Mi serve l'ascissa del punto P. $\begin{cases} y=2 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x=2$

Integrale che esprime l'area= $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{30}{1+x^2} - 2\right) dx + \int_2^3 \left(\frac{30}{1+x^2} - x\right) dx$

Area= (indicare anche i principali passaggi intermedi per il calcolo dell'integrale)

$$= \Big[30 \arctan x - 2x\Big]_0^2 + \left[30 \arctan x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 =$$

$$\left(30 \arctan 2 - 4\right) - \left(30 \arctan 0 - 0\right) + \left(30 \arctan 3 - \frac{9}{2}\right) -$$

$$- \left(30 \arctan 2 - \frac{4}{2}\right) = 30 \arctan 3 - \frac{13}{2} \approx 30.97$$

5) (3 punti) Una particella si muove di moto rettilineo con velocità $v(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{t}$. Di quanto si e' spostata la particella fra gli istanti $t=1$ e $t=2$? (indicare i principali passaggi intermedi)

$$\text{posizione}(2) - \text{posizione}(1) = \int_1^2 v(t)\, dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} + \sqrt{t}\right) dt$$

$$= \left[\ln t + \frac{2}{3} t^{3/2}\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 + \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1\right)$$

Nome: Corso di laurea:

Iscritto all'anno di corso: 1 2 3 f.c.

Corso di Matematica, Prova scritta parziale n. 2, 25 Gennaio 2008
Corsi di laurea in Alimentari e Viticoltura ed Enologia

In ogni esercizio oltre al risultato scrivete i passaggi principali necessari per arrivare alla soluzione.

1) (7 punti) Trovare i punti critici della funzione $x + 2\ln(3 + x^2)$ e cercare massimi e min assoluti negli intervalli indicati sotto.

punti critici= $x = -3$ $x = -1$

Indicare il valore massimo e quello minimo della funzione quando $x \in [-3, 1, -0.9]$

valore massimo = 1,96 ascissa corrispondente= $x = 3$

valore minimo = 1,77 ascissa corrispondente= $x = -1$

Indicare il valore massimo e quello minimo della funzione quando $x \in [-1, 0]$

valore massimo = 2,19 ascissa corrispondente= $x = 0$

valore minimo = 1,77 ascissa corrispondente= $x = -1$

2) (10 punti) Disegnare il grafico della seguente funzione, studiando anche la sua concavità:

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + x + 1}$$

dominio = $\mathbb{R}$

limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x \to +\infty} f = \lim_{x \to -\infty} f = 0$

Asintoti orizzontali? Asse x Asintoti verticali?

f si annulla in: $x = 0$ è positiva in: $[0, +\infty)$ ed è negativa in: $(-\infty, 0]$

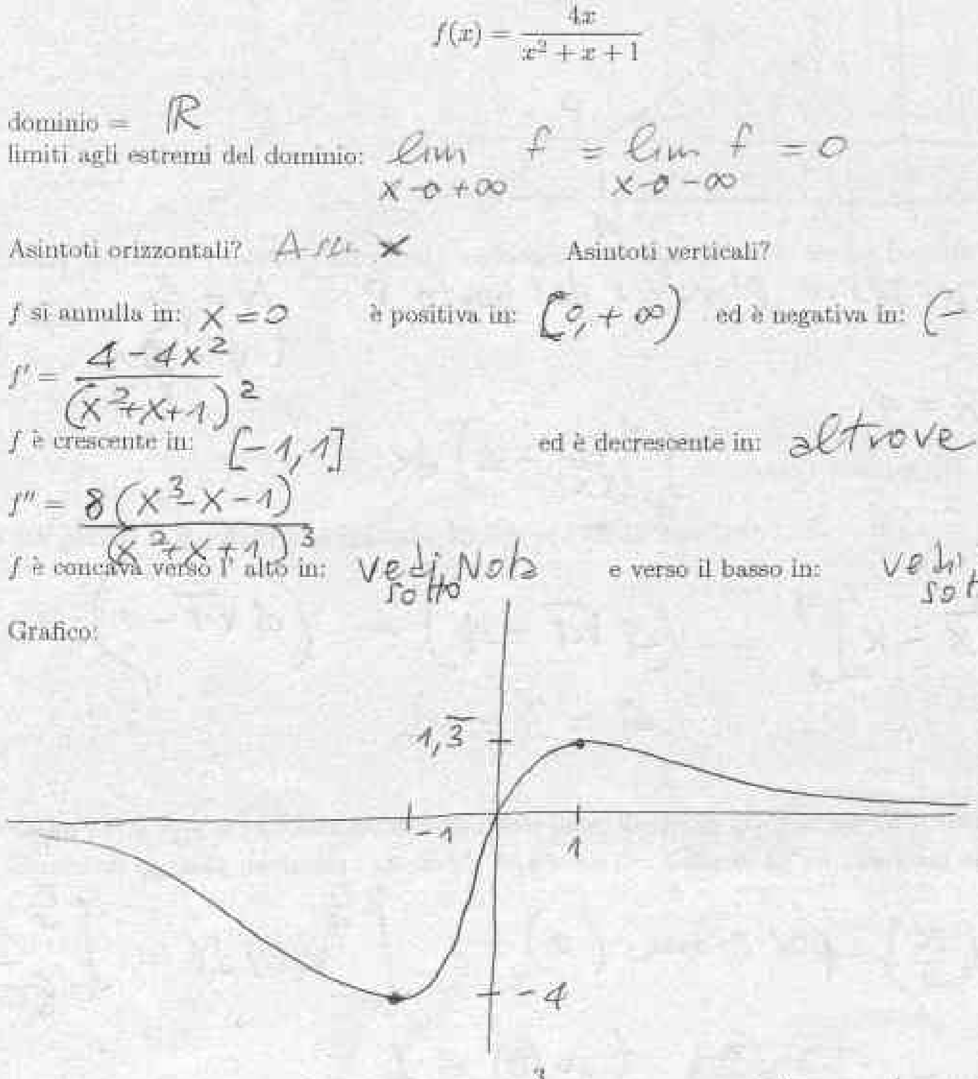
$f' = \dfrac{4 - 4x^2}{(x^2 + x + 1)^2}$

f è crescente in: $[-1, 1]$ ed è decrescente in: altrove

$f'' = \dfrac{8(x^3 - x - 1)}{(x^2 + x + 1)^3}$

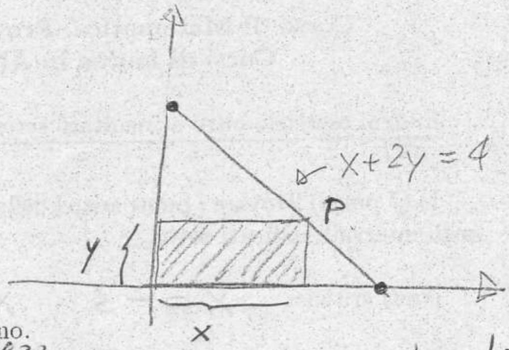
f è concava verso l'alto in: vedi Nota sotto e verso il basso in: vedi Nota sotto

Grafico:



Nota Studiare il segno di f'' (e quindi la concavità) era tecnicamente difficile. Di conseguenza ho ritenuto corretto un compito che contenesse f'' calcolato anche senza le risposte alle due domande sulla concavità.

3) (6 punti) Considerate il triangolo rettangolo che ha i cateti sugli assi x e y e ipotenusa sulla retta $x+2y=4$. Fra tutti i rettangoli contenuti nel triangolo e con un vertice nel punto di coordinate (0,0), trovare quello che ha area massima.



Indicare le variabili usate e che cosa esse rappresentano.

x lunghezza base, y = lunghezza altezza

Indicare l'eventuale equazione che lega tra loro le variabili. il punto P ha coordinate (x,y) e appartiene alla retta $x+2y=4$. Quindi risulta $x+2y=4$

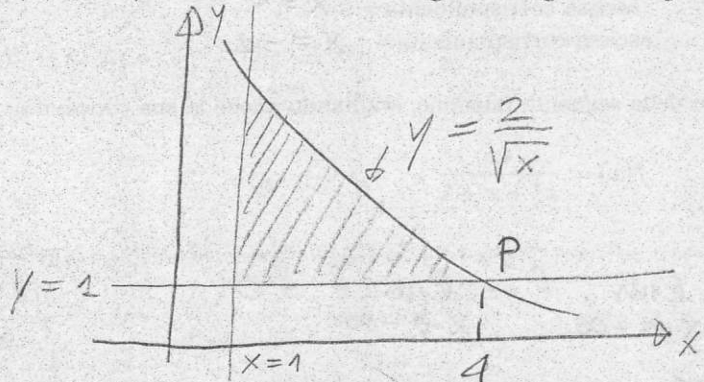
Indicare la funzione da studiare e l'intervallo in cui varia la variabile

$\text{Area} = x \cdot y = \cancel{x}\, y(4-2y) \qquad 0 \le y \le 2$ perché l'altezza del triangolo

Valore cercato (il massimo o il minimo, a seconda dell'esercizio) = è 2

Il valore massimo si ha per $y=1$ (e $x=2$). L'area viene uguale a 2

4) (7 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura.



Calcolo dei vari valori di x necessari per impostare l'integrale (indicare i principali passaggi intermedi):

Mi serve l'ascissa del punto P. $\begin{cases} y = \frac{2}{\sqrt{x}} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$

cioè $x=4$

Integrale che esprime l'area= $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$

Area= (indicare anche i principali passaggi intermedi per il calcolo dell'integrale)

$$= \Big[4\sqrt{x} - x\Big]_1^4 = \left(4\sqrt{4} - 4\right) - \left(4\sqrt{1} - 1\right) =$$

$$4 - 3 = 1$$

5) (3 punti) Una particella si muove di moto rettilineo con velocità $v(t) = \frac{1}{(\cos t)^2}$. Di quanto si e' spostata la particella fra gli istanti $t=0$ e $t=\pi/4$? (indicare i principali passaggi intermedi)

$$\text{posizione}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{posizione}(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} v(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\cos t)^2}\,dt =$$

$$\Big[\tan(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1$$

Nome: Corso di laurea:
Iscritto all'anno di corso:1 2 3 f.c.

Corso di Matematica, Prova scritta parziale n. 2, 25 Gennaio 2008
Corsi di laurea in Alimentari e Viticoltura ed Enologia

In ogni esercizio oltre al risultato scrivete i passaggi principali necessari per arrivare alla soluzione.

1) (7 punti) Trovare i punti critici della funzione seguente e cercare massimi e min assoluti negli intervalli indicati sotto:

$$\frac{2x^2-2}{e^{x^2}} \qquad f'(x) = \frac{4x\,e^{x^2} - (2x^2-2)e^{x^2}\cdot 2x}{e^{x^2}}$$

punti critici= $x=0 \quad x=-\sqrt{2} \quad x=\sqrt{2}$

Indicare il valore massimo e quello minimo della funzione quando $x \in [-1, 2]$

valore massimo = $0{,}27$ ascissa corrispondente= $x=\sqrt{2}$
valore minimo = -2 ascissa corrispondente= $x=0$

Indicare il valore massimo e quello minimo della funzione quando $x \in [-1, 0]$

valore massimo = 0 ascissa corrispondente= $x=-1$
valore minimo = -2 ascissa corrispondente= $x=0$

2) (10 punti) Disegnare il grafico della seguente funzione, studiando anche la sua concavità:

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x^3}$$

dominio = $x \neq 0$
limiti agli estremi del dominio:
$\lim_{x\to-\infty} f = 0 \quad \lim_{x\to 0^-} f = +\infty \quad \lim_{x\to 0^+} f = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f = 0$

Asintoti orizzontali? $\{y=0\}$ Asintoti verticali? $\{x=0\}$

f si annulla in: $\pm\sqrt{3}$ è positiva in: $[-\sqrt{3}, 0) \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ ed è negativa in: altrove

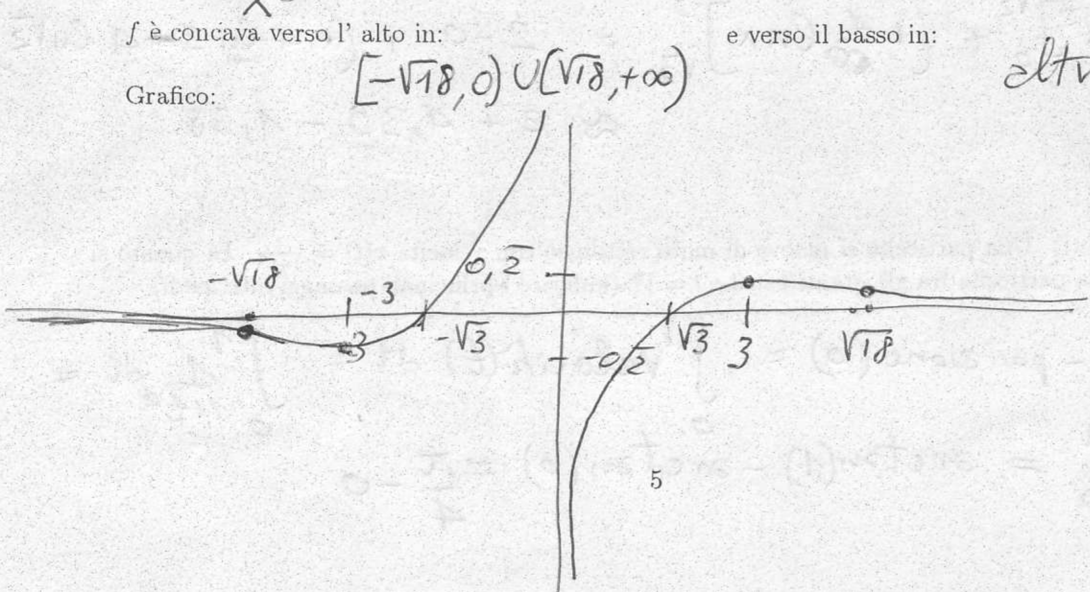
$f' = \dfrac{9-x^2}{x^4}$

f è crescente in: $[-3, 3]$ ed è decrescente in: altrove

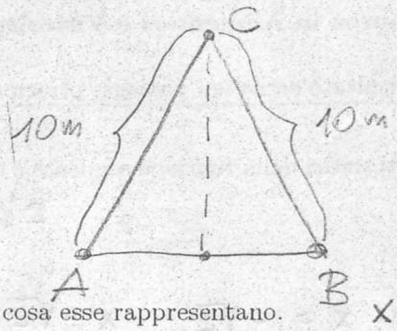
$f'' = \dfrac{2x^2-36}{x^5}$

f è concava verso l' alto in: $[-\sqrt{18}, 0) \cup [\sqrt{18}, +\infty)$ e verso il basso in: altrove

Grafico:



3) (6 punti) Fra tutti i triangoli isosceli con i due lati uguali lunghi 10 m trovare quello che ha area massima. Suggerimento: Se A, B e C sono i vertici del triangolo, AC e BC sono i due lati uguali e AB e' la base, allora il trinagolo che ha per vertici C, B e il punto medio di AB e' rettangolo. Quindi tranite il teorema di Pitagora sapendo la base si puo' trovare l'altezza.



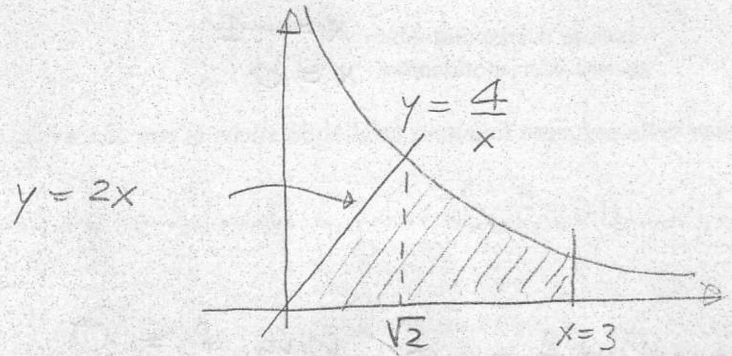
Indicare le variabili usate e che cosa esse rappresentano. X = lunghezza base AB
Y = lunghezza altezza

Indicare l'eventuale equazione che lega tra loro le variabili. $10^2 = \left(\frac{X}{2}\right)^2 + Y^2$

Indicare la funzione da studiare e l'intervallo in cui varia la variabile
Area $= \frac{1}{2}\sqrt{100 - \frac{X^2}{4}} \cdot X \;/\; X \in [0,20]$

Valore cercato (il massimo o il minimo, a seconda dell'esercizio) = il massimo si ha quando $X = 10\sqrt{2}$. l'Area max è 50

4) (7 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura.



Calcolo dei vari valori di x necessari per impostare l'integrale (indicare i principali passaggi intermedi):

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{4}{x} \end{cases} \Rightarrow \quad 2x = \frac{4}{x} \Rightarrow \quad \frac{2x^2}{x} = \frac{4}{x} \Rightarrow \quad x^2 = 2 \quad x = +\sqrt{2}$$

Integrale che esprime l'area= $\int_0^{\sqrt{2}} 2x\,dx + \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{4}{x}\,dx$

Area= (indicare anche i principali passaggi intermedi per il calcolo dell'integrale)

$$x^2\Big]_0^{\sqrt{2}} + \Big[+4\ln x\Big]_{\sqrt{2}}^3 = 2 - 0 + (+4\ln 3 - 4\ln\sqrt{2})$$

$$\approx 2 + 4{,}39 - 1{,}38$$

5) (3 punti) Una particella si muove di moto rettilineo con velocità $v(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Di quanto si e' spostata la particella fra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$? (indicare i principali passaggi intermedi)

$$\text{posizione}(1) - \text{posizione}(0) = \int_0^1 \text{velocità}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \arctan(t)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0$$

$$f'(x) = \sqrt{18-x^2} + x \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{18-x^2}}$$

$$= \frac{18-x^2-x^2}{\sqrt{18-x^2}}$$

Nome: Corso di laurea:

Iscritto all'anno di corso: 1 2 3 f.c.

Corso di Matematica, Prova scritta parziale n. 2, 25 Gennaio 2008
Corsi di laurea in Alimentari e Viticoltura ed Enologia

In ogni esercizio oltre al risultato scrivete i passaggi principali necessari per arrivare alla soluzione.

1) (7 punti) Trovare i punti critici della funzione $x\sqrt{18-x^2}$ e cercare massimi e min assoluti negli intervalli indicati sotto.

punti critici= $x = 3$ e $x = -3$ (e anche i punti $x = \pm\sqrt{18}$, dove f' non è definita)

Indicare il valore massimo e quello minimo della funzione quando $x \in [-4, 4]$

valore massimo = 9 ascissa corrispondente= $x = 3$
valore minimo = -9 ascissa corrispondente= $x = -3$

Indicare il valore massimo e quello minimo della funzione quando $x \in [0, 4]$

valore massimo = 9 ascissa corrispondente= $x = 3$
valore minimo = 0 ascissa corrispondente= $x = 0$

2) (10 punti) Disegnare il grafico della seguente funzione, studiando anche la sua concavità:

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x}$$

dominio = $x \neq -1$

limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$

$\lim_{x\to-1^-} f = +\infty$ $\lim_{x\to-1^+} f = -\infty$

Asintoti orizzontali? NO Asintoti verticali? sì $x = -1$

f si annulla in: 0 è positiva in: $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ ed è negativa in: $(-1, 0)$

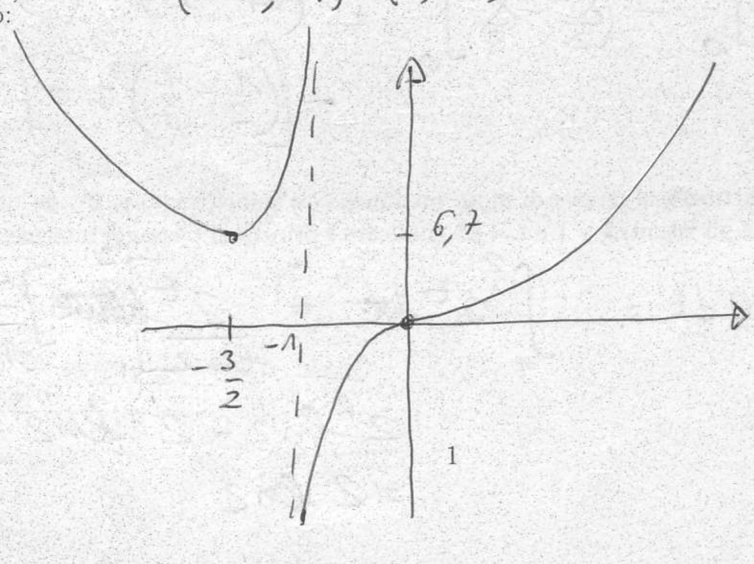
$f' = \frac{(3+2x)x^2}{(1+x)^2}$

f è crescente in: $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ ed è decrescente in: $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$

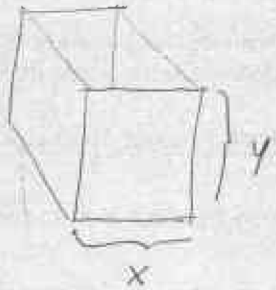
$f'' = \frac{2x(x^2+3x+3)}{(1+x)^3}$

f è concava verso l' alto in: $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ e verso il basso in: $(-1, 0]$

Grafico:



3) (6 punti) Una scatola dalla base quadrata e senza coperchio deve avere un volume di 4 m^3. Determinare le dimensioni della scatola in modo che la quantità di cartone utilizzato per la sua fabbricazione sia minima.



Indicare le variabili usate e che cosa esse rappresentano. x = base y = altezza

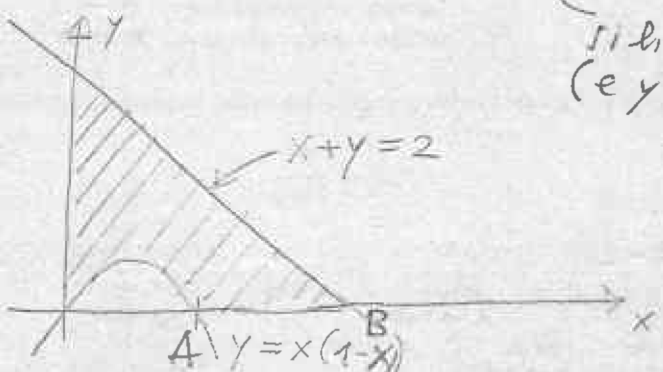
Indicare l'eventuale equazione che lega tra loro le variabili. $\cancel{4}yx^2 = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{\cancel{4}x^2}$

Indicare la funzione da studiare e l'intervallo in cui varia la variabile superficie di base + 4 facce laterali $= x^2 + 4xy = x^2 + \frac{16x}{4x^2} = x^2 + \frac{16}{x}$

$x \in (0, +\infty)$

Valore cercato (il massimo o il minimo, a seconda dell'esercizio) = si ha quando $x = 2$ (e $y = 1$).

4) (7 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura.



Calcolo dei vari valori di x necessari per impostare l'integrale (indicare i principali passaggi intermedi):

l'ascissa di A è data dalle intersezioni di $y = x(1-x)$ con l'asse x. si ottiene A = 1

l'ascissa di B dalle intersezione della retta $x+y=2$ con l'asse x. si ottiene B = 2

Integrale che esprime l'area= $\int_0^2 (2-x)\,dx - \int_0^1 x(1-x)\,dx$

Area= (indicare anche i principali passaggi intermedi per il calcolo dell'integrale)

$$= 2x - \frac{x^2}{2}\Big]_0^2 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \Big((4-2)-(0)\Big) - \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-0\right] = 2 - \frac{1}{6}$$

5) (3 punti) Una particella si muove di moto rettilineo con velocità $v(t) = 2^t$. Di quanto si e' spostata la particella fra gli istanti $t = 1$ e $t = 2$? (indicare i principali passaggi intermedi)

$$s(2) - s(1) = \int_1^2 v(t)\,dt = \int_1^2 2^t\,dt = \frac{2^t}{\ln 2}\Big]_1^2 = \frac{2}{\ln 2}$$