Nome: Corso di laurea: Iscritto all'anno di corso:

Modulo di Matematica, Prova scritta parziale n. 2, 19 gennaio 2007
Corsi di laurea in Alimentari e Viticoltura ed Enologia

<u>In ogni esercizio oltre al risultato scrivete i passaggi principali necessari per arrivare alla soluzione.</u>

1) Tracciare il grafico della funzione $f(x) = e^x(x^2+2x+1)$ (ignorando lo studio della concavità) e risolvere il problema di ricerca di massimo e minimo assoluto indicato alla fine dell'esercizio.

dominio = tutto $\mathbb{R}$

limiti agli estremi del dominio (per calcolare il limite per $x \to -\infty$ é utile scrivere la funzione come $\frac{x^2+2x+1}{e^{-x}}$): $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{e^{-x}} = 0$ (applicando due volte la regola de Hopital)

Asintoti orizzontali? $\{y=0\}$ quando $x\to-\infty$ Asintoti verticali? NO

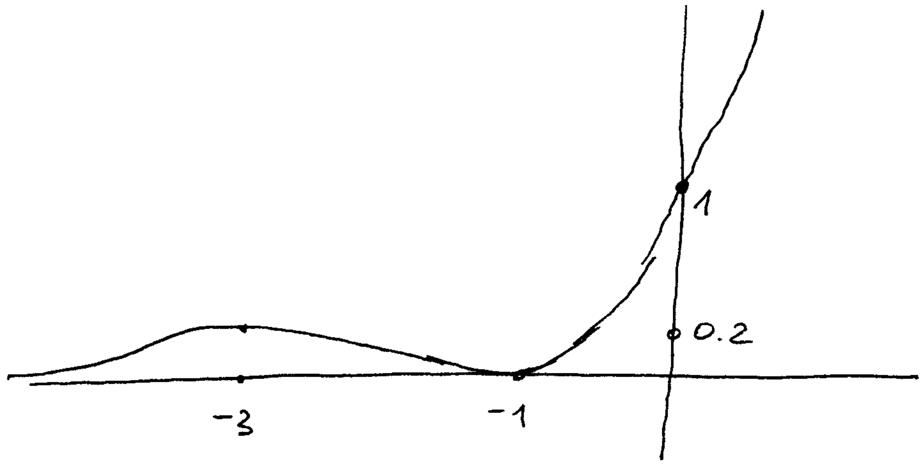
f si annulla in: $x=-1$ è positiva in: $x \neq -1$ ed è negativa in: mai

$f' =$ $e^x(x+1)(x+3)$ $f'=0$ se $x=-1$ e $x=-3$

f è crescente in: $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$ ed è decrescente in: altrove

Grafico:

$f(0)=1$
$f(-1)=0$
$f(-3)\approx 0.2$



Determinare inoltre i valori di massimo e minimo assoluto per f QUANDO x VARIA NELL'INTERVALLO $[-4,0]$ (non in tutto il dominio!).

valore massimo = 1 raggiunto nel punto $x = 0$

valore minimo = 0 raggiunto nel punto $x = -1$

2) Una particella si muove di moto rettilineo con velocità $v(t) = t^2 - 3t$. $s(t)$ indica la sua posizione al tempo t e sappiamo che $s(0) = 20$. Calcolare

- $s(1)$: = Poiché $s(1) - s(0) = \int_0^1 v(t)\,dt$ allora $s(1) = 20 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2}$
- $s(t)$, per ogni $t > 0$: Analogamente $s(t) = s(0) + \int_0^t x^2 - 3x\,dx = 20 + \frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2$
- la <u>distanza</u> percorsa dalla particella nell'intervallo $[0,5]$.

$$\| \int_0^5 |v(t)|\,dt = \int_0^3 (-v(t))\,dt + \int_3^5 v(t)\,dt = \int_0^3 3t - t^2\,dt + \int_3^5 t^2 - 3t\,dt = \dots$$

poiché $v(t) < 0$ in $[0,3]$
e $v(t) > 0$ in $[3,5]$

$\to = 2\sqrt{3} - 2 - \ln 3 + \ln 1 + 15 - 5$

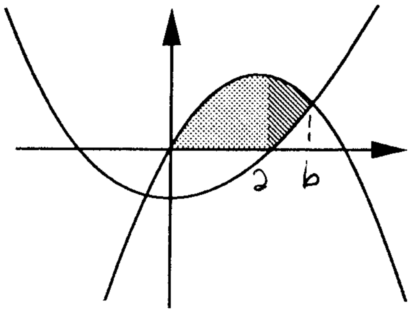
3)Calcolare i seguenti integrali (indicando i principali passaggi intermedi):

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}-1}{x} + 5\,dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx - \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^3 5\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^3 - \left[\ln x\right]_1^3 + \left[5x\right]_1^3 =$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[2\tan x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[2 \operatorname{arcsen} x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= 2\tan\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\tan 0 + 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{2}} + - 2\operatorname{arcsen} 0$$

4) Le due parabole in figura sono $y = x(3-x)$ e $y = x^2 - 1$. Calcolare l'area delle due regioni evidenziate nelle diverse tonalità di grigio.



a : intersezione tra $y = x^2 - 1$ e $y = \dots$ $\Rightarrow 0 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$

$\boxed{a = 1}$

b : intersezione tra due parabole $y = x^2 - 1$ $y = 3x - x^2$

$x^2 - 1 = 3x - x^2$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$ $x = \begin{cases} 1.78 \\ -0.28 \end{cases}$

$b = 1.78$

calcolo degli estremi superiori e inferiori degli integrali (indicare i principali passaggi intermedi)

integrali che esprimono le due aree:

area regione a destra: area regione a sinistra: (indicare i principali passaggi intermedi)

$$\int_a^b (3x - x^2) - (x^2 - 1)\,dx = \int_1^{1.78} (3x + 1 - x^2)\,dx = \dots$$

$$\int_0^a (3x - x^2) - 0\,dx = \int_0^1 3x - x^2\,dx = \dots$$

5) Calcolare un valore approssimato dell'integrale utilizzando una somma di Riemann (dividere l'intervallo in 6 parti uguali e usare i punti medi come punti base).

$$\int_{-0.6}^{0.6} e^x - 1\,dx$$

Calcolare inoltre il valore esatto di tale integrale, sfruttando il fatto che una primitiva è $e^x - x$.

impostazione della somma di Riemann:

$-0.6 \quad -0.4 \quad -0.2 \quad 0 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.6$

valore approssimato: valore esatto:

$$\approx \frac{0.6 - (-0.6)}{6} \cdot \left(e^{+0.5} - 1 + e^{+0.3} - 1 + e^{+0.1} - 1 + e^{-0.1} - 1 - e^{-0.3} - 1 - e^{-0.5} - 1\right) = \dots$$

$$\left[e^x - x\right]_{-0.6}^{0.6} = 0.073$$

Nome: Corso di laurea: Iscritto all'anno di corso:

Modulo di Matematica, Prova scritta parziale n. 2, 19 gennaio 2007
Corsi di laurea in Alimentari e Viticoltura ed Enologia

In ogni esercizio oltre al risultato scrivete i passaggi principali necessari per arrivare alla soluzione.

1) Tracciare il grafico della funzione $f(x) = e^x(2x^2+1)$ (ignorando lo studio della concavità) e risolvere il problema di ricerca di massimo e minimo assoluto indicato alla fine dell'esercizio.

dominio = tutto $\mathbb{R}$

limiti agli estremi del dominio (per calcolare il limite per $x \to -\infty$ é utile scrivere la funzione come $\frac{2x^2+1}{e^{-x}}$): $\lim_{x \to +\infty} (2x^2+1)e^x = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} (2x^2+1)e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2+1}{e^{-x}} = 0$ (applicando due volte Hopital)

Asintoti orizzontali? $\{y = 0\}$ a $-\infty$ Asintoti verticali? No

f si annulla in: mai è positiva in: sempre ed è negativa in: mai

$f' =$ $e^x(2x^2+1+4x)$ $\quad f' = 0$ quando $x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (cioè $x \approx -0{,}3$ e $x \approx -1{,}7$)

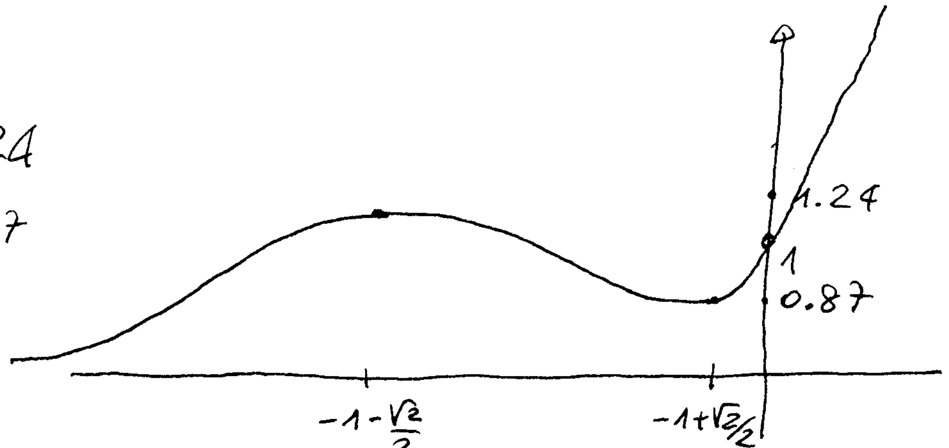
f è crescente in: $\left(-\infty, -1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ ed è decrescente in: altrove

Grafico:

$f(0) = 1$

$f\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1.24$

$f\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0.87$



Determinare inoltre i valori di massimo e minimo assoluto per f QUANDO x VARIA NELL'INTERVALLO $[-2, 0]$ (non in tutto il dominio!).

valore massimo = $f\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ raggiunto nel punto $x =$ $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

valore minimo = $f\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ raggiunto nel punto $x =$ $-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Una particella si muove di moto rettilineo con velocità $v(t) = 4t - t^2$. $s(t)$ indica la sua posizione al tempo t e sappiamo che $s(0) = 20$. Calcolare

- $s(1)$: Poiché $s(1) - s(0) = \int_0^1 v(t)\,dt$, allora $s(1) = 20 + \int_0^1 4t - t^2\,dt = 20 + 2 - \frac{1}{3}$
- $s(t)$, per ogni $t > 0$: come sopra: $s(t) = 20 + \int_0^t v(x)\,dx = 20 + 2t^2 - \frac{t^3}{3}$
- la distanza percorsa dalla particella nell'intervallo $[0, 5]$.

$\|$

$\int_0^5 |v(t)|\,dt = \int_0^4 v(t)\,dt + \int_4^5 (-v(t))\,dt = \int_0^4 4t - t^2\,dt + \int_4^5 t^2 - 4t\,dt = \ldots\ldots$

poiché $v(t) \geq 0$ se $t \in [0,4]$ e $v(t) \leq 0$ se $t \in [4,5]$

$$= \frac{6}{5} 3^{5/2} - \frac{6}{5} 1 + \frac{1}{3} - 1 - 6 + 2$$

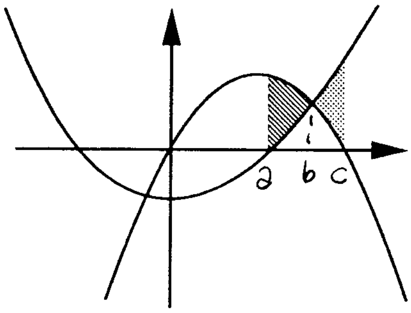
3)Calcolare i seguenti integrali (indicando i principali passaggi intermedi):

$$\int_1^3 3x\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} - 2\,dx = 3\int_1^3 x^{3/2}dx - \int_1^3 x^{-2}dx - \int_1^3 2\,dx = \left[3\cdot\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{x} - 2x\right]_1^3 =$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2(\sin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\,dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2\,\text{sen}\,x\,dx + 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[-2\cos x + 2\,\text{arcsen}\,x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= -2\cos\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\,\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt{2}} - 0$$

4) Le due parabole in figura sono $y = x(4-x)$ e $y = x^2 - 4$. Calcolare l'area delle due regioni evidenziate nelle diverse tonalità di grigio.



a: ascissa intersezione parabola $y = x^2 - 4$ con asse x. quindi $a = 4$

b: ascissa intersezione due parabole.

$4x - x^2 = x^2 - 4 \qquad x = 1 \pm \sqrt{3} \;\begin{cases} 2.73 \\ -0.73 \end{cases}$

quindi $b = 2.73$

c: ascissa intersezione parabola $y = 4x - x^2$ con asse x. Quindi $c = 4$

calcolo degli estremi superiori e inferiori degli integrali (indicare i principali passaggi intermedi)

integrali che esprimono le due aree:

area regione a destra: area regione a sinistra: (indicare i principali passaggi intermedi)

$$\int_b^c (x^2-4) - (4x - x^2)\,dx = \int_{2.73}^{4} 2x^2 - 4x - 4\,dx = \dots$$

$$\int_a^b (4x-x^2) - (x^2-4)\,dx = \int_2^{2.73} 4 - 4x - 2x^2\,dx = \dots$$

5) Calcolare un valore approssimato dell'integrale utilizzando una somma di Riemann (dividere l'intervallo in 6 parti uguali e usare i punti medi come punti base).

$$\int_{0.2}^{1.4} 2\ln x\,dx$$

Calcolare inoltre il valore esatto di tale integrale, sfruttando il fatto che una primitiva è $2(x\ln x - x)$.

impostazione della somma di Riemann:

0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4

valore approssimato: valore esatto:

$$= \frac{1.4-0.2}{6}\left(2\ln 0.3 + 2\ln 0.5 + 2\ln 0.7 + 2\ln 0.9 + 2\ln 1.1 + 2\ln 1.3\right) =$$

$$= -0.80$$

$$2(x\ln x - x)\Big]_{0.2}^{1.4} = -1.8578 + 1.0437 = 0.814$$

Nome: Corso di laurea: Iscritto all'anno di corso:

Modulo di Matematica, Prova scritta parziale n. 2, 19 gennaio 2007
Corsi di laurea in Alimentari e Viticoltura ed Enologia

In ogni esercizio oltre al risultato scrivete i passaggi principali necessari per arrivare alla soluzione.

1) Tracciare il grafico della funzione $f(x) = e^x(4 - x^2)$ (ignorando lo studio della concavità) e risolvere il problema di ricerca di massimo e minimo assoluto indicato alla fine dell'esercizio.

dominio = tutto $\mathbb{R}$

limiti agli estremi del dominio (per calcolare il limite per $x \to -\infty$ é utile scrivere la funzione come $\frac{4-x^2}{e^{-x}}$): $\lim_{x\to+\infty} (4-x^2)e^x = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} (4-x^2)e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{4-x^2}{e^{-x}} = 0$ (applicando due volte Hopital)

Asintoti orizzontali? $\{y=0\}$ Asintoti verticali? NO

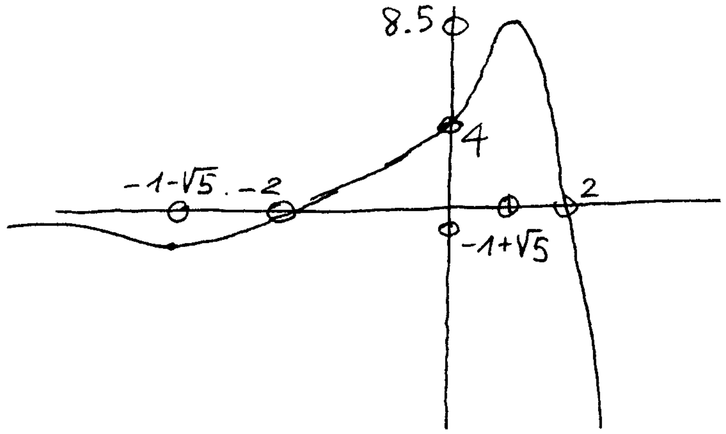
f si annulla in: $x = \pm 2$ è positiva in: $(-2,2)$ ed è negativa in: $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

$f' =$ $e^x(4-x^2-2x)$ $f'=0$ per $x = -1 \pm \sqrt{5}$ (cioè $x \approx 1.23$ e $x \approx -3.23$)

f è crescente in: $(-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5})$ ed è decrescente in: $(-\infty, -1-\sqrt{5}) \cup (-1+\sqrt{5}, +\infty)$

Grafico:

$f(-1+\sqrt{5}) \approx 8.5$
$f(-1-\sqrt{5}) \approx -0.25$
$f(0) = 4$



Determinare inoltre i valori di massimo e minimo assoluto per f *quando x varia nell'intervallo* $[0,3]$ (non in tutto il dominio!).

valore massimo = $f(-1+\sqrt{5}) \approx 8.5$ raggiunto nel punto $x =$ $-1+\sqrt{5}$

valore minimo = $f(3) \approx -100$ raggiunto nel punto $x =$ $x=3$

2) Una particella si muove di moto rettilineo con velocità $v(t) = t^2 - 2t$. $s(t)$ indica la sua posizione al tempo t e sappiamo che $s(0) = 20$. Calcolare

- $s(1)$: Poichè $s(1)-s(0) = \int_0^1 v(t)dt$ allora $s(1) = 20 + \int_0^1 t^2-2t\,dt = 20 + \frac{1}{3} - 1$
- $s(t)$, per ogni $t > 0$: come sopra: $s(t) = 20 + \int_0^t v(x)dx = 20 + \frac{t^3}{3} - t^2$
- la distanza percorsa dalla particella nell'intervallo $[0,5]$.

$\parallel$

$\int_0^5 |v(t)|\,dt = \int_0^2 -v(t)dt + \int_2^5 v(t)dt = \int_0^2 2t-t^2\,dt + \int_2^5 t^2-2t\,dt = \ldots\ldots$

poichè $v(t) < 0$ in $[0,2]$
e $v(t) > 0$ in $[2,5]$

$$= 3 - 1 - \frac{3}{2} 3^{-\frac{2}{3}} + \frac{3}{2} \cdot 1 - \ln 3 + \ln 1$$

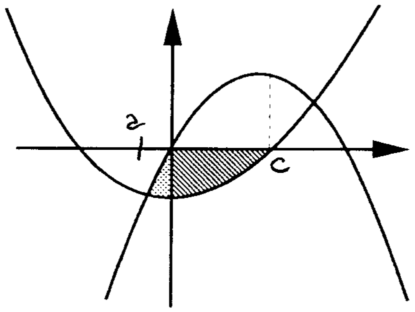
3)Calcolare i seguenti integrali (indicando i principali passaggi intermedi):

$$\int_1^3 1 + \frac{\sqrt[3]{x} - x}{x^2}\, dx = \int_1^3 1\, dx + \int_1^3 x^{-5/3} dx - \int_1^3 \frac{1}{x} dx = [x]_1^3 + \left[-\frac{3}{2} x^{-\frac{2}{3}}\right]_1^3 - [\ln x]_1^3 =$$

$$\int_0^1 3(2^x + \frac{2}{1+x^2})\, dx = 3\int_0^1 2^x dx + 6\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[3 \frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1 + \left[6 \operatorname{arctg} x\right]_0^1 =$$

$$\frac{6}{\ln 2} - \frac{3}{\ln 2} + 6 \cdot \frac{\pi}{4} - 0$$

4) Le due parabole in figura sono $y = x(2-x)$ e $y = 0.5(x^2 - 1)$. Calcolare l'area delle due regioni evidenziate nelle diverse tonalità di grigio.



a: ascissa del punto di intersezione tra le due parabole $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \end{cases}$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$ ↗ 1.5 ↘ −0.2

Quindi $a \approx -0.2$

c: ascissa del punto in cui la parabola $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ interseca asse x, cioè $x = 1$

calcolo degli estremi superiori e inferiori degli integrali (indicare i principali passaggi intermedi)

- integrali che esprimono le due aree: grigio

area regione a ~~destra:~~ sx area regione a ~~sinistra:~~ destra (indicare i principali passaggi intermedi)

$$\int_{-0,2}^{0} x(2-x) - \frac{1}{2}(x^2 - 1)\, dx = \int_{-0.2}^{0} -\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}\, dx = 0.056$$

$$\int_0^1 0 - \frac{1}{2}(x^2 - 1)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

5) Calcolare un valore approssimato dell'integrale utilizzando una somma di Riemann (dividere l'intervallo in 6 parti uguali e usare i punti medi come punti base).

$$\int_{0.4}^{1.6} \ln x\, dx$$

Calcolare inoltre il valore esatto di tale integrale, sfruttando il fatto che una primitiva è $x \ln x - x$.

impostazione della somma di Riemann: $\frac{(1.6 - 0.4)}{6}(\ln 0.5 + \ln 0.7 + \ln 0.9 + \ln 1.1 + \ln 1.3 + \ln 1.5) = -0.078$

0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6

valore approssimato: valore esatto:

$$\text{valore esatto} = [x \ln x - x]_{0.4}^{1.6} = -0.847 + 0.766 = -0.081$$