✓ COMPITO A

Nome: Corso di laurea: Indicare se 6 o 12 crediti:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 9 Febbraio 2011

1) **(4 punti)** Una grandezza $F(t)$ cresce esponenzialmente in funzione del tempo t. E' noto che $F(0) = 50$ e che ogni 30 secondi il valore di F si moltiplica per 5.

- Scrivere la formula che esprime quanto vale F dopo t secondi;
- Scrivere per quale tempo t la grandezza F è uguale a 500.

Svolgimento:

① $F(t) = 50 \cdot (5)^{\frac{t}{30}}$

② $F(t) = 500$ — $50 \cdot (5)^{\frac{t}{30}} = 500$

$(5)^{\frac{t}{30}} = 10$ $\quad \frac{t}{30} = \log_5 10$ $\quad t = 30 \cdot \log_5 10 =$

$= 30 \cdot \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 5} \approx 42,92$

2) **(6,5 punti)**

- Trovare il punto A del grafico di $f(x) = e^{-x+1} + x$ in cui la retta tangente al grafico è parallela alla retta di equazione $y + 3x = 0$.
- Dire per quali valori di m esiste una retta tangente al grafico di f che è parallela a $y = mx$?

Svolgimento:

① La retta $y+3x=0$ ha $m=-3$. Allora nel punto A il coeff. angolare della retta tangente al grafico di f deve essere -3. Ciò vuol dire che la derivata di $e^{-x+1}+x$ calcolata nella coordinata x di A deve essere -3. Allora per trovare la coordinata x di A risolvo l'equazione $f'(x)=-3$

Calcolo $f'(x) = e^{-x+1}\cdot(-1)+1$. L'equazione allora è $-e^{-x+1}+1=-3$

cioè $e^{-x+1}=4$, cioè $-x+1=\ln(4)$, $x=1-\ln(4)\approx -0,39$

Per trovare la coordinata y di A sostituisco la x in f

$y=f(x)=f(1-\ln(4)) = e^{-(1-\ln 4)+1}+1-\ln 4 = e^{\ln 4}+1-\ln 4 = 5-\ln(4) \approx 3,61$

$A=(1-\ln 4, 5-\ln 4)$

② Esiste se l'equazione $f'(x)=m$ ha soluzione. Cioè se ha soluzione $-e^{-x+1}+1=m$ cioè $e^{-x+1}=1-m$. Questa equazione ha soluzione se $1-m>0$, cioè se $m<1$.

3) (7 punti) Sia

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{2 - x}.$$

La funzione ha come dominio $\{x \neq 2\}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$, $\lim_{x\to2^-} f = +\infty$, $\lim_{x\to2^+} f = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f = -\infty$.

- **Dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;**
- **dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;**
- **disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.**

Svolgimento:

~~grafo~~f interseca asse x $\iff f(x)=0 \iff x=0$ e $x=-2$

" " sopra o sotto asse x $\iff$ segno di f

$$\begin{array}{ccccccc} + & | & - & | & + & | & - \\ & -2 & & 0 & & 2 & \end{array}$$

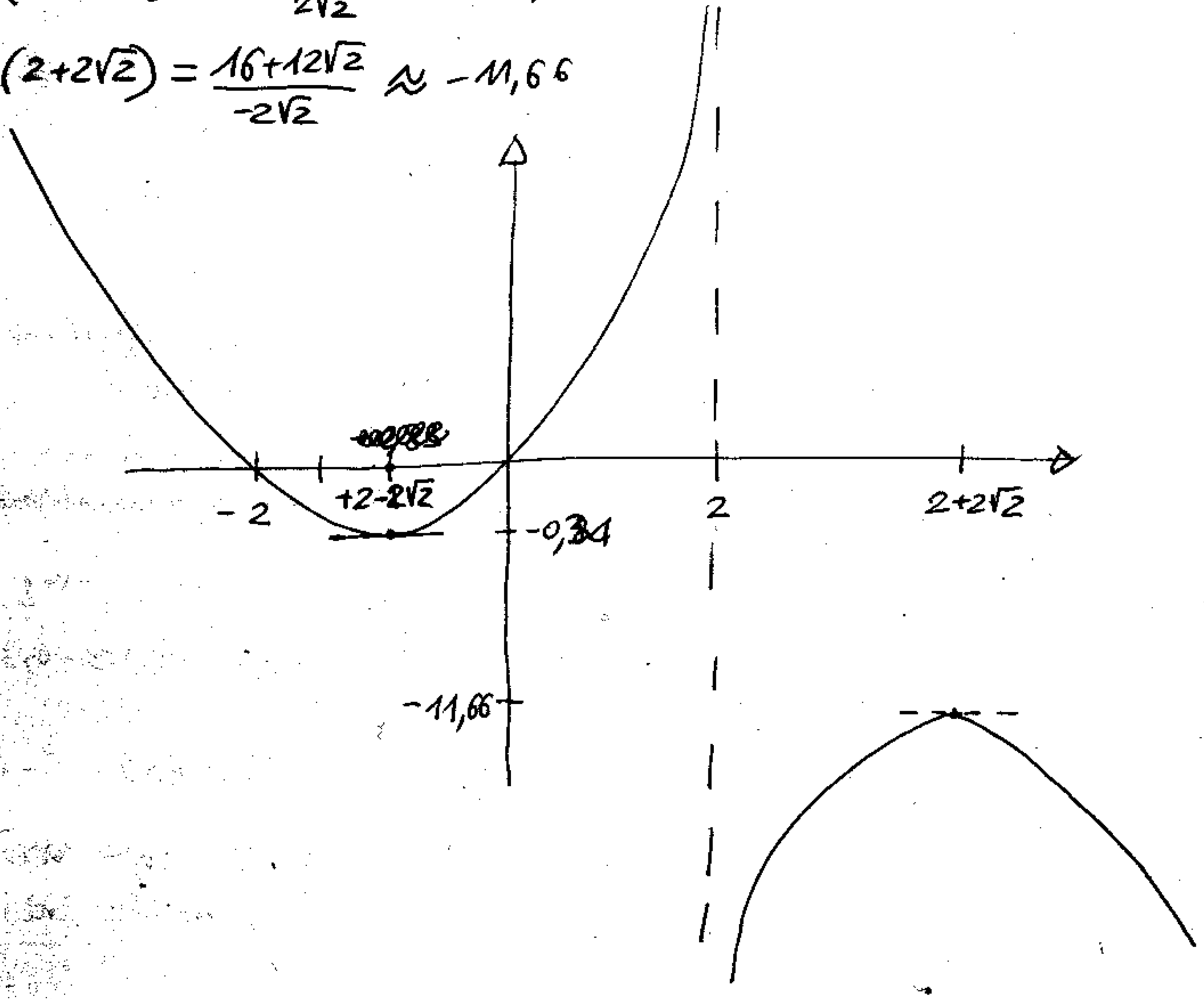
Calcolo $f' = \dfrac{(2x+2)(2-x) - (x^2+2x)(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{-x^2+4x+4}{(2-x)^2}$

Punti in cui $f'=0 \longrightarrow x = 2-2\sqrt{2}$ e $x = 2+2\sqrt{2}$ $(\approx x \approx -0{,}83$ e $x \approx 4{,}83)$

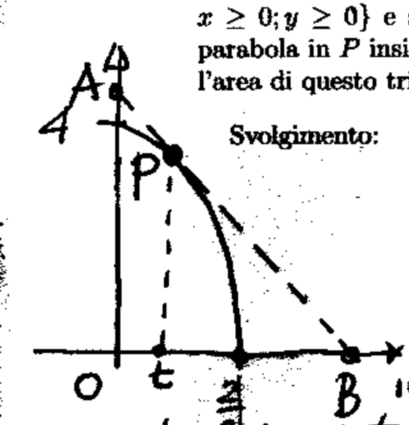
Valore di f nei punti critici

$f(2-2\sqrt{2}) = \dfrac{16-12\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \approx -0{,}34$

$f(2+2\sqrt{2}) = \dfrac{16+12\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} \approx -11{,}66$



4) (4 punti) Considerate la parte della parabola $y = 4 - 9x^2$ contenuta nel primo quadrante $\{(x, y) : x \geq 0; y \geq 0\}$ e sia P un punto qualsiasi di questa parte di parabola. La retta tangente a questa parabola in P insieme agli assi x e y forma un triangolo. Come deve essere scelto P ~~x~~ se si vuole che l'area di questo triangolo sia la più piccola possibile?

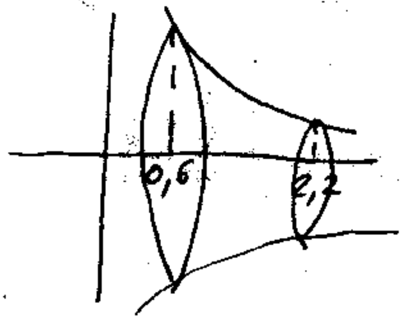


Svolgimento: Voglio scrivere l'area del triangolo ABO come funzione del punto P sulla parabola. Mi serve dare un nome alla coordinata x di P. La chiamo t, non la chiamo x per non far confusione con la x che comparirà quando scriverò l'equaz. della retta tangente in P. P ha coordinate $(t, 4-9t^2)$. La derivata di $4-9x^2$ calcolata in $x=t$ è $-18t$. Allora l'equaz. della retta tangente in P è $y-(4-9t^2)=(-18t)(x-t)$ cioè $y=-18tx+4+9t^2$. Calcolo le coordinate dei punti A e B. $A = (0, 4+9t^2)$, $B=\left(\frac{4+9t^2}{18t}, 0\right)$. Allora l'area del triangolo ABO è $\frac{1}{2}(4+9t^2)\left(\frac{4+9t^2}{18t}\right)$. Variare il punto P sull'arco di parabola equivale a variare t in $[0,\frac{2}{3}]$. Allora devo trovare il minimo assoluto di $\frac{(4+9t^2)^2}{36t}$ con $t\in[0,\frac{2}{3}]$. Derivando si vede che questa funzione decresce in $[0,\frac{2}{\sqrt{27}}]$ e cresce in $[\frac{2}{\sqrt{27}}, \frac{2}{3}]$ $\left(0 \searrow \frac{2}{\sqrt{27}} \nearrow \frac{2}{3}\right)$. Quindi $t=\frac{2}{\sqrt{27}}$ è il punto di minimo assoluto

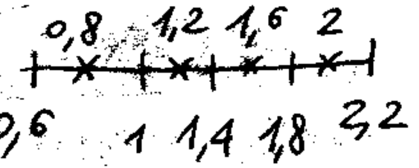
5) (5 punti) Si prende la parte del grafico di $1/x$ compresa tra i suoi punti di ascissa $x = 0.6$ e $x = 2.2$ e lo si fa ruotare intorno all'asse x di 360°, creando un solido di rotazione.

- Scrivere il volume di questo solido tramite un integrale.
- Calcolare una approssimazione dell'integrale che esprime questo volume usando il metodo dei punti medi e $n = 4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

Svolgimento



$$\text{volume} = \int_{0,6}^{2,2} \pi \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$



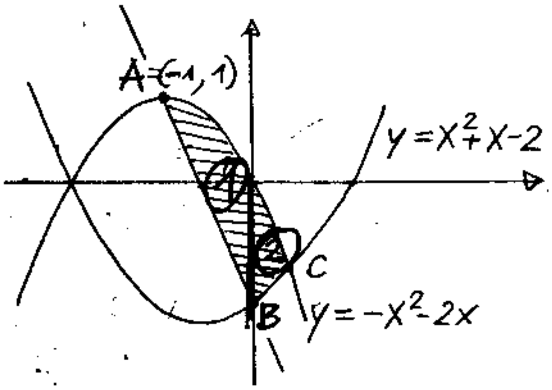
$$\Delta x = \frac{2,2-0,6}{4} = 0,4$$

$$\text{volume} \approx \Delta x \left(\pi \frac{1}{(0,8)^2} + \pi \frac{1}{(1,2)^2} + \pi \frac{1}{(1,6)^2} + \pi \frac{1}{(2)^2} \right)$$

$$= 0,4 \left(4,91 + 2,18 + 1,23 + 0,79 \right)$$

$$= 3,644$$

6) (6,5 punti) Calcolare il valore esatto dell'area ombreggiata in figura. (Suggerimento: Calcolare le coordinate di B e C, scrivere l'equazione della retta per A e B, spezzare l'area in due parti in modo che l'area di ogni parte possa essere calcolata tramite un integrale.)



Svolgimento:

B: intersezione tra $y=x^2+x-2$ e asse y $\begin{cases} y=x^2+x-2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow B=(0,-2)$

C: " " $y=x^2+x-2$ e $y=-x^2-2x$ $\begin{cases} y=x^2+x-2 \\ y=-x^2-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2+x-2 \\ -x^2-2x=x^2+x-2 \end{cases}$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ , y=-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-1=-5/4$

retta per A e B $\quad m=\frac{1-(-2)}{-1-0}=-3 \quad y-(-2)=-3(x-0)$

$y=-3x-2$

Area 1 $=\int_{-1}^{0}-x^2-2x-(-3x-2)\,dx=\int_{-1}^{0}-x^2+x+2\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}$

$=0-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)\right)=-\left(+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=4/6$

Area 2 $=\int_{0}^{\frac{1}{2}}-x^2-2x-(x^2+x-2)\,dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}-2x^2-3x+2\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=$ $=\frac{13}{24}$

Prova scritta (6 crediti) del 9 Febbraio 2011

Risolvere (scrivendo lo svolgimento nello spazio corrispondente del compito da 12 crediti) gli esercizi 1 (4 punti), 2 (7 punti), 3 (8,5 punti), 6 (7 punti) del compito da 12 crediti e il seguente:

5') (6,5 punti) Calcolare un valore approssimato dell'integrale

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1+(\sin x)^2}dx$$

tramite il metodo del trapezio con $n=5$.

$0 \quad \frac{\pi}{5} \quad \frac{2}{5}\pi \quad \frac{3}{5}\pi \quad \frac{4}{5}\pi \quad \pi$ $\quad \Delta x=\frac{\pi}{5}$ $\quad$ integrale $\approx \frac{\frac{\pi}{5}}{2}\Big(\sqrt{1+(\text{sen}\,0)^2}+2\sqrt{1+(\text{sen}\,\frac{\pi}{5})^2}+$

$+2\sqrt{1+(\text{sen}\,\frac{2}{5}\pi)^2}+2\sqrt{1+(\text{sen}\,\frac{3}{5}\pi)^2}+2\sqrt{1+(\text{sen}\,\frac{4}{5}\pi)^2}+\sqrt{1+(\text{sen}\,\pi)^2}\Big)$

COMPITO B : Riporto solo i risultati. Per il metodo vedi compito A

Nome: Corso di laurea: Indicare se 6 o 12 crediti:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 9 Febbraio 2011

1) (4 punti) Una grandezza $F(t)$ cresce esponenzialmente in funzione del tempo t. E' noto che $F(0) = 3$ e che ogni 10 secondi il valore di F si moltiplica per 4.

- Scrivere la formula che esprime quanto vale F dopo t secondi;
- Scrivere per quale tempo t la grandezza F è uguale a 30.

Svolgimento:

a) $F(t) = 3 \cdot (4)^{\frac{t}{10}}$

b) $3 \cdot (4)^{\frac{t}{10}} = 30 \rightarrow \frac{t}{10} = \log_4 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 4} \approx 1,66$

$t = \frac{10}{\log_{10} 4} \approx 16,60$

2) (6,5 punti)

- Trovare il punto A del grafico di $f(x) = e^{3x-1} - x$ in cui la retta tangente al grafico è parallela alla retta di equazione $y - 8x = 0$.
- Dire per quali valori di m esiste una retta tangente al grafico di f che è parallela a $y = mx$?

Svolgimento:

a) $f'(x) = 8 \quad 3e^{3x-1} - 1 = 8 \quad e^{3x-1} = 3$

$3x - 1 = \ln(3) \quad x = \frac{\ln(3) + 1}{3} \approx 0,67$

$A = \left(\frac{\ln 3 + 1}{3}; \frac{4 - \ln 3}{3}\right) \approx (0,67; 0,97)$

b) L'equazione $f'(x) = m$ ha soluzione se e solo se $m > -1$

3) (7 punti) Sia

$$f(x)=\frac{x+x^2}{5-x}.$$

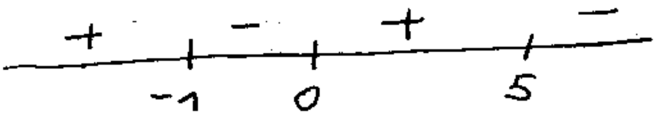
La funzione ha come dominio $\{x\neq 5\}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f=+\infty$, $\lim_{x\to5^-} f=+\infty$, $\lim_{x\to5^+} f=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f=-\infty$.

- Dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;
- dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
- disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

Svolgimento:

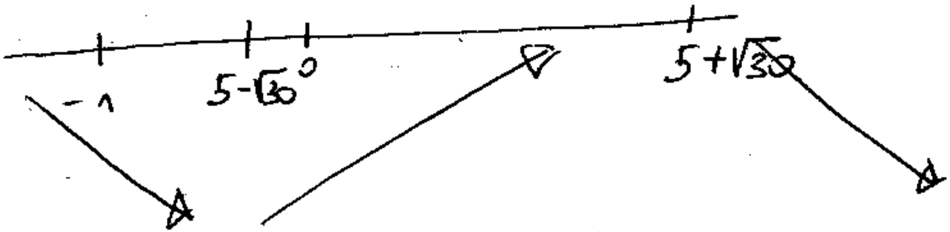
$f=0$ $\quad X=0,\ X=-1$

segno di f



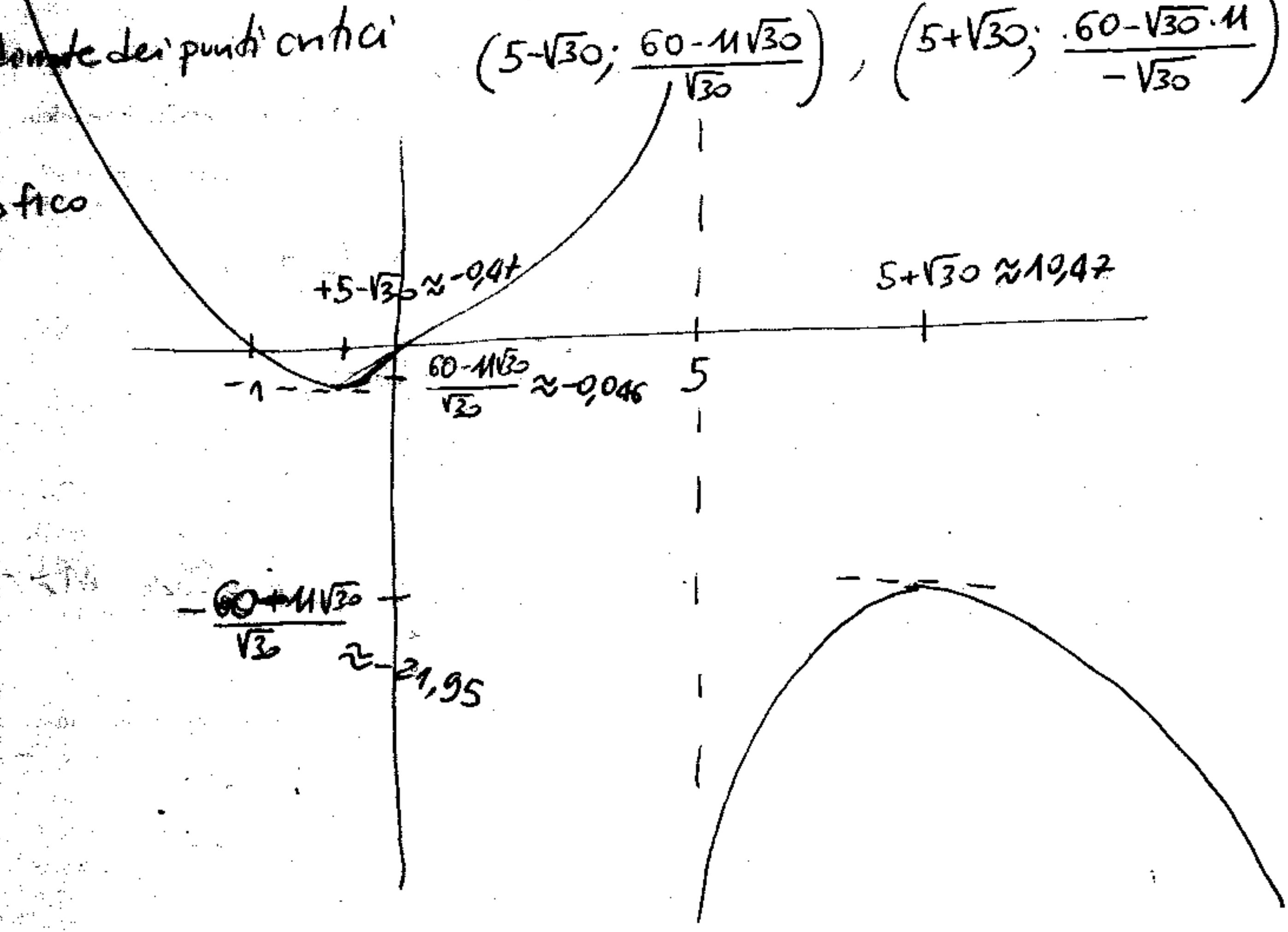
$$f'=\frac{-x^2+10x+5}{(5-x)^2}$$. I punti critici sono $X=5\pm\sqrt{30}$

crescenza di f



coordinate dei punti critici $\left(5-\sqrt{30};\ \frac{60-11\sqrt{30}}{\sqrt{30}}\right)$, $\left(5+\sqrt{30};\ \frac{60-\sqrt{30}\cdot 11}{-\sqrt{30}}\right)$

Grafico



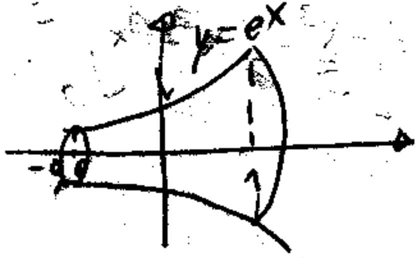
4) (4 punti) Considerate la parte della parabola $y = 9 - 9x^2$ contenuta nel primo quadrante $\{(x, y) : x \geq 0; y \geq 0\}$ e sia P un punto qualsiasi di questa parte di parabola. La retta tangente a questa parabola in P insieme agli assi x e y forma un triangolo. Come deve essere scelto P su se si vuole che l'area di questo triangolo sia la più piccola possibile?

Svolgimento: vedi compito A

5) (5 punti) Si prende la parte del grafico di e^x compresa tra i suoi punti di ascissa $x = -0.6$ e $x = 1$ e lo si fa ruotare intorno all'asse x di 360°, creando un solido di rotazione.

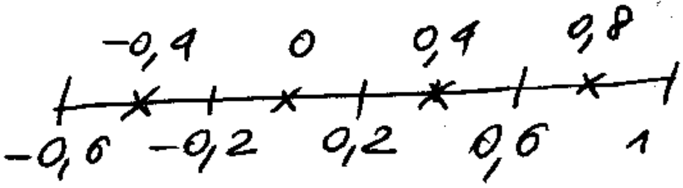
- Scrivere il volume di questo solido tramite un integrale.
- Calcolare una approssimazione dell'integrale che esprime questo volume usando il metodo dei punti medi e $n = 4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

Svolgimento



$$\text{Volume} = \int_{-0,6}^{1} \pi (e^x)^2 \, dx$$

$$\Delta x = \frac{1-(-0,6)}{4} = \frac{1,6}{4} = 0,4$$

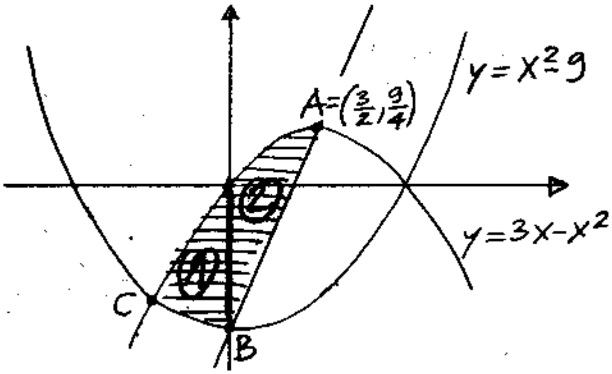


$$\text{Volume} \approx \pi \cdot \Delta x \cdot \left(e^{-2\cdot 0,4} + e^{2\cdot 0} + e^{2\cdot 0,4} + e^{2\cdot 0,8} \right)$$

$$\approx \pi \, 0,4 \left(0,45 + 1 + 2,23 + 4,95 \right)$$

$$= \pi \cdot 3,452 = 10,84$$

6) (6,5 punti) Calcolare il valore esatto dell'area ombreggiata in figura. (Suggerimento: Calcolare le coordinate di B e C, scrivere l'equazione della retta per A e B, spezzare l'area in due parti in modo che l'area di ogni parte possa essere calcolata tramite un integrale.)



Svolgimento:

$B=(0,-9)$ $\quad C=\left(-\frac{3}{2},-\frac{27}{4}\right)$ $\quad$ retta per A e B $\quad y=\frac{15}{2}x-9$

$$\text{Area ①}=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}(3x-x^2)-(x^2-9)\,dx=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}-2x^2+3x+9\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right]_{-\frac{3}{2}}^{0}=$$

$$0-\left(-\frac{2}{3}\left(-\frac{27}{8}\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}+9\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=\frac{63}{8}\approx 7,875$$

$$\text{Area ②}=\int_{0}^{\frac{3}{2}}3x-x^2-\left(\frac{15}{2}x-9\right)dx=\int_{0}^{3/2}-x^2-\frac{9}{2}x+9\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{9}{4}x^2+9x\right]_{0}^{3/2}$$

$$=\frac{117}{16}=7,3125$$

Prova scritta (6 crediti) del 9 Febbraio 2011

Risolvere (scrivendo lo svolgimento nello spazio corrispondente del compito da 12 crediti) gli esercizi 1 (4 punti), 2 (7 punti), 3 (8,5 punti), 6 (7 punti) del compito da 12 crediti e il seguente:

5') (6,5 punti) Calcolare un valore approssimato dell'integrale

$$\int_0^\pi \sqrt{1+(\sin x)^2}dx$$

tramite il metodo del trapezio con $n=5$.

1 COMPITO C. Riporto solo i risultati. Per il metodo vedi compito A

Nome: Corso di laurea: Indicare se 6 o 12 crediti:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 9 Febbraio 2011

1) (4 punti) Una grandezza $F(t)$ cresce esponenzialmente in funzione del tempo t. E' noto che $F(0) = 15$ e che ogni 20 secondi il valore di F si moltiplica per 3.

- Scrivere la formula che esprime quanto vale F dopo t secondi;
- Scrivere per quale tempo t la grandezza F è uguale a 150.

Svolgimento:

$$F(t) = 15(3)^{\frac{t}{20}}$$

$$15(3)^{\frac{t}{20}} = 150 \qquad 3^{\frac{t}{20}} = 10 \qquad \frac{t}{20} = \log_3 10$$

$$t = 20\log_3 10 = 20\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 3} = \frac{20}{\log_{10} 3} \approx 41,91$$

2) (6,5 punti)

- Trovare il punto A del grafico di $f(x) = e^{2x+1} + x$ in cui la retta tangente al grafico è parallela alla retta di equazione $y - 5x = 0$.
- Dire per quali valori di m esiste una retta tangente al grafico di f che è parallela a $y = mx$?

Svolgimento:

a) $m = 5$ Risolvo equazione $f'(x) = 5$

$f'(x) = 2e^{2x+1} + 1$. Quindi $f'(x) = 5 \Longleftrightarrow 2e^{2x+1} + 1 = 5$

$e^{2x+1} = 2 \qquad 2x+1 = \ln 2 \qquad x = \frac{\ln 2 - 1}{2} \approx -0,15$

coordinata y di $A = f\left(\frac{\ln 2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + \ln 2}{2}$

Allora $A = \left(\frac{\ln 2 - 1}{2}, \frac{3 + \ln 2}{2}\right)$

b) L'equazione $f'(x) = m$ è $2e^{2x+1} + 1 = m$, cioè $e^{2x+1} = \frac{m-1}{2}$

e ha soluzione se e solo se $\frac{m-1}{2} > 0$, cioè se $m > 1$

3) (7 punti) Sia

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x+5}.$$

La funzione ha come dominio $\{x \neq -5\}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$, $\lim_{x\to-5^-} f = -\infty$, $\lim_{x\to-5^+} f = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$.

- **Dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;**
- **dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;**
- **disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.**

Svolgimento:

$f = 0 \iff x = 0,\ x = 1$

segno di f

$- \quad -5 \quad + \quad 0 \quad - \quad 1 \quad +$

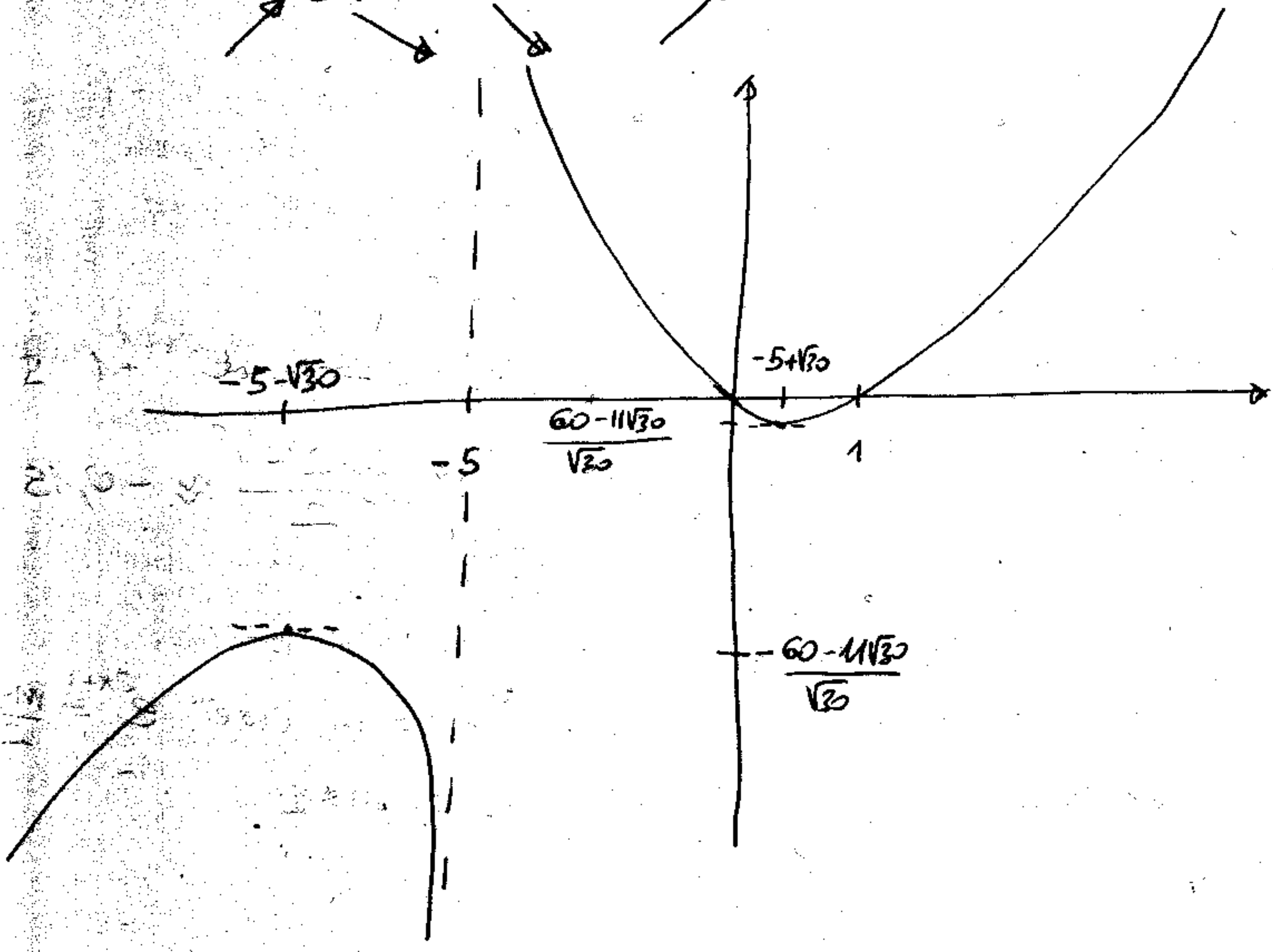
$$f'(x) = \frac{x^2+10x-5}{(x+5)^2}$$

punti critici $\quad x = -5 \pm \sqrt{30}$, valore di f in $-5-\sqrt{30} = \frac{-60-11\sqrt{30}}{\sqrt{30}}$

valore di f in $-5+\sqrt{30} = \frac{60-11\sqrt{30}}{\sqrt{30}}$

crescenza

$\nearrow \quad -5-\sqrt{30} \quad \searrow \quad -5 \quad \searrow \quad -5+\sqrt{30} \quad \nearrow$



4) (4 punti) **Considerate** la parte della parabola $y = 9 - 4x^2$ contenuta nel primo quadrante $\{(x, y) : x \geq 0; y \geq 0\}$ e sia P un punto qualsiasi di questa parte di parabola. La retta tangente a questa parabola in P insieme agli assi x e y forma un triangolo. Come deve essere scelto P su se si vuole che l'area di questo triangolo sia la più piccola possibile?

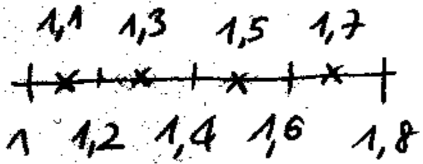
Svolgimento: vedi compito A

5) (5 punti) Si prende la parte del grafico di $\ln x$ compresa tra i suoi punti di ascissa $x = 1$ e $x = 1.8$ e lo si fa ruotare intorno all'asse x di 360°, creando un solido di rotazione.

- Scrivere il volume di questo solido tramite un integrale.
- Calcolare una approssimazione dell'integrale che esprime questo volume usando il metodo dei punti medi e $n = 4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

Svolgimento

a) $$\text{volume} = \int_1^{1,8} \pi (\ln x)^2 \, dx$$

b) 

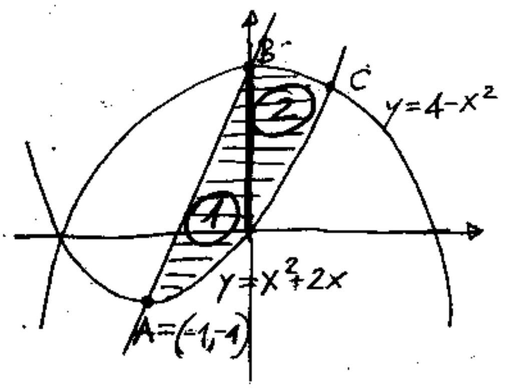
$$\Delta x = \frac{1,8 - 1}{4} = 0,2$$

$$\text{volume} \approx \Delta x \cdot \pi \left((\ln(1,1))^2 + (\ln 1,3)^2 + (\ln 1,5)^2 + (\ln 1,7)^2 \right)$$

$$\approx 0,2 \cdot \pi \left(0,0090 + 0,0688 + 0,1644 + 0,2816 \right)$$

$$= \pi \cdot 0,1048 \approx 0,3291$$

6) (6,5 punti) Calcolare il valore esatto dell'area ombreggiata in figura. (Suggerimento: Calcolare le coordinate di B e C, scrivere l'equazione della retta per A e B, spezzare l'area in due parti in modo che l'area di ogni parte possa essere calcolata tramite un integrale.)



Svolgimento:

$B=(0,4)$ $C=(1,3)$ Retta per A e B $y=5x+4$

area ① $= \int_{-1}^{0} 5x+4-(x^2+2x)\,dx = \int_{-1}^{0} -x^2+3x+4\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{0} =$

$0-\left[-\frac{1}{3}(-1)^3+\frac{3}{2}(-1)^2+4(-1)\right] = \frac{13}{6} \approx 2{,}1666$

area ② $= \int_{0}^{1} 4-x^2-(x^2+2x)\,dx = \int_{0}^{1} -2x^2-2x+4\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{0}^{1}$

$= \left(-\frac{2}{3}-1+4\right)-0 = \frac{7}{3} \approx 2{,}3333$

Area totale $= \frac{13}{6}+\frac{7}{3}$ ~~[illegible]~~

Prova scritta (6 crediti) del 9 Febbraio 2011

Risolvere (scrivendo lo svolgimento nello spazio corrispondente del compito da 12 crediti) gli esercizi 1 (4 punti), 2 (7 punti), 3 (8,5 punti), 6 (7 punti) del compito da 12 crediti e il seguente:

5') (6,5 punti) Calcolare un valore approssimato dell'integrale

$$\int_0^\pi \sqrt{1+(\sin x)^2}dx$$

tramite il metodo del trapezio con $n=5$.