Nome: Corso di laurea: 9 o 12 crediti?

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 6 Febbraio 2013

1) (8 punti) Sia

$$f(x) = \frac{-5}{x+2}.$$

- Scrivere l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$.
- Se esiste una retta tangente al grafico di f che e' orizzontale determinare il punto di tangenza, altrimenti spiegare il perchè non esiste.
- Se esiste una retta tangente al grafico di f che e' parallela alla retta $y = x$ determinare il punto di tangenza, altrimenti spiegare il perchè non esiste.

Svolgimento:

a) Calcolo $f(0)$ e ottengo $-\frac{5}{2}$.
Calcolo m. m è uguale a $f'(0)$ cioè a $\frac{+5}{(x+2)^2}$ calcolato in $x=0$, cioè $m = \frac{5}{4}$

Allora la retta tangente è la retta per $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ che ha $m = \frac{5}{4}$, cioè

$y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{2}$

b) Una retta orizzontale tangente al grafico esiste solo se esiste un x in cui f' è zero. Ma l'equazione $f'(x) = 0$ non ha soluzioni, perchè è $\frac{+5}{(x+2)^2} = 0$ non ha soluzioni

c) Una retta tangente al grafico è parallela a $y=x$ solo se il suo m è 1. Cerco allora gli x in cui f' è 1.
L'equazione $f'(x) = 1$ cioè $\frac{5}{(x+2)^2} = 1$

è equivalente a $\frac{5-(x+2)^2}{(x+2)^2} = 0$. cioè $5-(x+2)^2 = 0$. cioè $x^2+4x-1=0$

Le soluzioni sono $x = -2 \pm \sqrt{5}$. I punti corrispondenti del grafico sono $(-2+\sqrt{5}, f(-2+\sqrt{5}))$ e $(-2-\sqrt{5}, f(-2-\sqrt{5}))$, cioè
$\left(-2+\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$ e $\left(-2-\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$

2) Sia $f(x) = \dfrac{12-4x}{x^2-2x}$.

La funzione ha come dominio $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq 2\}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f = +\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f = +\infty$ e $\lim_{x\to 2^-} f = -\infty$.

(1) (1,5 punti) dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;

(2) (3 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;

(3) (3,5 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

1) intersezioni con asse x $\longrightarrow$ soluzioni di $f(x)=0$ cioè di $12-4x=0$ quindi $x=3$

grafico sopra/sotto alle x $\longrightarrow$ segno di f

		0		2		3	
segno di $12-4x$	+		+		+		−
" di x^2-2x	+		−		+		+
segno di f	+		−		+		−

2) calcolo $f'(x) = \dfrac{(12-4x)'(x^2-2x) - (12-4x)(x^2-2x)'}{(x^2-2x)^2}$ e ottengo

$$f'(x) = \frac{4(x^2-6x+6)}{(x^2-2x)^2}$$

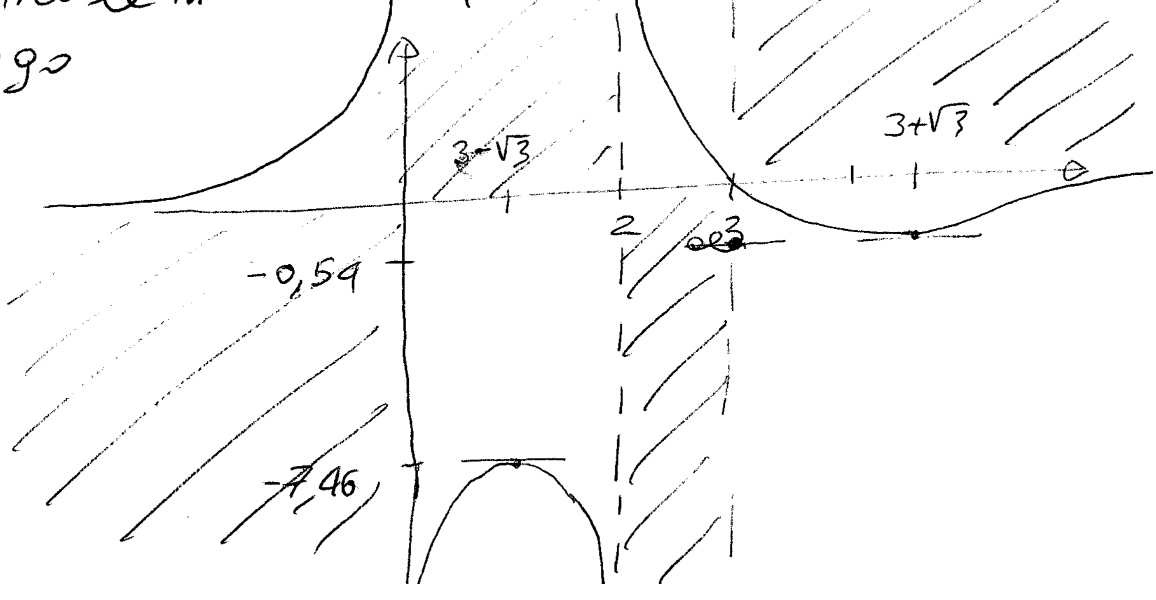
I punti in cui f' è zero sono $x = 3 \pm \sqrt{3}$ in cui f vale rispettivamente $f(3+\sqrt{3}) \approx -0{,}54$ e $f(3-\sqrt{3}) \approx -7{,}46$

Il segno di f' è

		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$	
segno di $4(x^2-6x+6)$	+		−		+
" " $(x^2-2x)^2$	+		+		+
segno di f'	+		−		+

da cui la crescenza è ↗ ↘ ↗

3) Unisco le informazioni precedenti a quelle sui limiti e ottengo



3) (7 punti) Considerate la parte del grafico di $\sqrt{x}+5$ formata dai punti con coordinata $x \in [0,2]$.

- Scrivete questa lunghezza come un integrale.
- Calcolate una approssimazione della **lunghezza** approssimando il precedente integrale utilizzando il metodo dei punti medi con $n = 5$.

Svolgimento:

* La lunghezza è uguale a $\int_0^2 \sqrt{1+(\text{derivata di } \sqrt{x}+5)^2}\,dx$

cioè è uguale a $\int_0^2 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$

* chiamo $g(x) = \sqrt{1+\frac{1}{4x}}$. $\Delta x = \frac{2-0}{5} = 0,4$

Allora gli intervalli sono $0 \quad 0,4 \quad 0,8 \quad 1,2 \quad 1,6 \quad 2$ e i punti medi sono $0,2 \quad 0,6 \quad 1 \quad 1,4 \quad 1,8$. La regola dei punti medi dice che

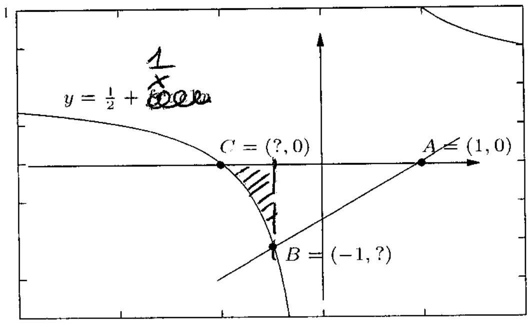
$$\int_0^2 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = \Delta x\left(g(0,2)+g(0,6)+g(1)+g(1,4)+g(1,8)\right) =$$

$$0,2\left(\sqrt{1+\frac{1}{4\cdot 0,2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4\cdot 0,6}}+\sqrt{1+\frac{1}{4}}+\sqrt{1+\frac{1}{4\cdot 1,4}}+\sqrt{1+\frac{1}{4\cdot 1,8}}\right) \approx 2,3844$$

4) (2 punti) Sapendo che in un certo istante di tempo la base di un triangolo è lunga $3cm$ e cresce con una rapidità di $0,5cm/s$ e che l'area del triangolo è $6cm^2$ e cresce con una velocità di $2cm^2/s$, dire se in quell'istante l'altezza del triangolo sta crescendo o diminuendo e con che velocità.

Svolgimento:

1° modo $A = \frac{1}{2} b \cdot h$ e quindi $h = \frac{2A}{b}$. Nel particolare istante di tempo in cui A è 6 e b è 3 otteniamo che $h = 4$. Sia A che b e h dipendono dal tempo $h(t) = \frac{2A(t)}{b(t)}$. Derivo tutto rispetto a t e ottengo $h' = \frac{2A'b - 2Ab'}{b^2}$. Sostituendo i valori di A, b, A' e b' ottengo che $h' = \frac{2}{3}$. Quindi ~~[illegible]~~ in quell'istante h cresce con una velocità di $\frac{2}{3}cm/s$.



5) (7 punti) Calcolate l'area del "triangolo con un lato curvo" ABC in figura. (Suggerimento: è necessario che calcoliate la coordinata y di B, la coordinata x di C e l'equazione della retta passante per A e B.)

Svolgimento:

① coordinata y di B è uguale a $\frac{1}{2} + \frac{1}{x}$ calcolata in $x = -1$, cioè $-\frac{1}{2}$

coordinata x di C. E' la x per cui $\frac{1}{2} + \frac{1}{x}$ è uguale a 0.

L'equazione $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} = 0$ dà $\frac{x+2}{2x} = 0$ e quindi $x + 2 = 0$, $x = -2$

② eq. retta. $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1}{4}$ Allora la retta ha eq. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

③ L'area è uguale alla somma dell'area tratteggiata in figura e all'area del triangolo restante.

L'area tratteggiata è $\int_{-2}^{-1} 0 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right) dx = \left[-\frac{x}{2} - \ln|x|\right]_{-2}^{-1}$

$= \left(\frac{1}{2} - \ln|1|\right) - \left(\frac{2}{2} - \ln(2)\right) = -\frac{1}{2} + \ln(2) \approx 0{,}19$

L'area dell'altro triangolo è $\frac{1}{2}$ base $\cdot$ altezza $= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$