Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 4 Aprile 2018

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1 punto) Considerate la funzione f dell'esercizio 2. Dite per quali x la retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$ ha coefficiente angolare negativo.

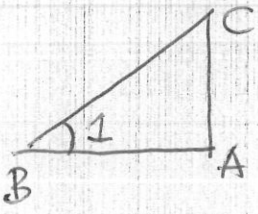
soluzione

$$m = f'(x) = 3 - 2 \cdot \frac{2}{2x-1} = \frac{6x-7}{2x-1}$$

$m < 0$ quando $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{6}$

1b) (1,5 punti) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\widehat{B}C$ è 1 radiante e la lunghezza dell'ipotenusa è 10. Calcolare l'area del triangolo.

soluzione



$AC = 10 \cdot \text{sen}\, 1 \approx 8,41$

$AB = 10 \cdot \cos 1 \approx 5,40$

$$\text{Area} = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{100 \cdot \text{sen}\, 1 \cdot \cos 1}{2} \approx 22,7$$

1c) (1,5 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $y = (x^2 e^x)^3$ nel punto $(1, e^3)$

soluzione

$m = f'(1)$ $\qquad f'(x) = 3(x^2e^x)^2 \cdot (2xe^x + x^2e^x) = 3(x^2e^x)^2 xe^x(2+x)$

$f'(1) = 3e^2 \cdot (2e + e) = 9e^3$

$y - e^3 = 9e^3(x-1)$ $\quad$ (o anche $y - 20,09 = 180,77\,(x-1)$)

o $y = 180,77x - 160,68$

1d) (1,5 punti) Trovare una primitiva della funzione $x^2\left(x^5 + \frac{1}{x^3}\right)$.

soluzione

$$\int x^7 + \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^8}{8} + \ln|x| + C$$

2) (6 punti) Sia

$$f(x) = 3x + 7 - 2\ln(2x - 1).$$

Calcolate il valore massimo e il valore minimo di $f(x)$ quando $x \in [\frac{2}{3}, 5]$. (Ricordatevi che la funzione logaritmo è definita solo se il suo argomento è positivo.)

punto di massimo $x = 5$	; valore massimo= $17{,}61$
punto di minimo $x = \frac{7}{6}$	; valore minimo= $9{,}92$

Svolgimento:

$$f'(x) = 3 - \frac{2}{2x-1} \cdot 2 = \frac{6x-7}{2x-1}$$

segno di f' in $\left[\frac{2}{3}, 5\right]$

$$\begin{array}{cccc} [& - & | & + &] \\ \frac{2}{3} & & \frac{7}{6} & & 5 \end{array}$$

f decresce in $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right]$ e cresce in $\left[\frac{7}{6}, 5\right]$.

Allora $x = \frac{7}{6}$ è il punto di min assoluto. $f\left(\frac{7}{6}\right) = 3 \cdot \frac{7}{6} + 7 - 2\ln\left(\frac{7}{3} - 1\right)$

$= \frac{7}{2} + 7 - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{21}{2} - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 9{,}92$

Max assoluto: o $x = \frac{2}{3}$ o $x = 5$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 11{,}197$

$f(5) = 17{,}61$

Quindi $x = 5$ è il punto di max assoluto

3) (8 punti) Sia $f(x) = \dfrac{6x^2+5}{3x^3} - \dfrac{17}{3x^2}$.

Il dominio di f è tutto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f = 0$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere f' e dire dove f cresce, dove decresce e dove f' è zero;
c) Disegnare il grafico di f (non tenendo conto della concavità)

f è positiva in $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ e negativa in altrove è zero in $x = 1/3$ e $x = 5/2$
derivata prima di f
f cresce in e decresce in
valore di f nei punti critici

Svolgimento e grafico:

$$f = \frac{6x^2+5}{3x^3} - \frac{17x}{3x^3} = \frac{6x^2-17x+5}{3x^3}$$

segno

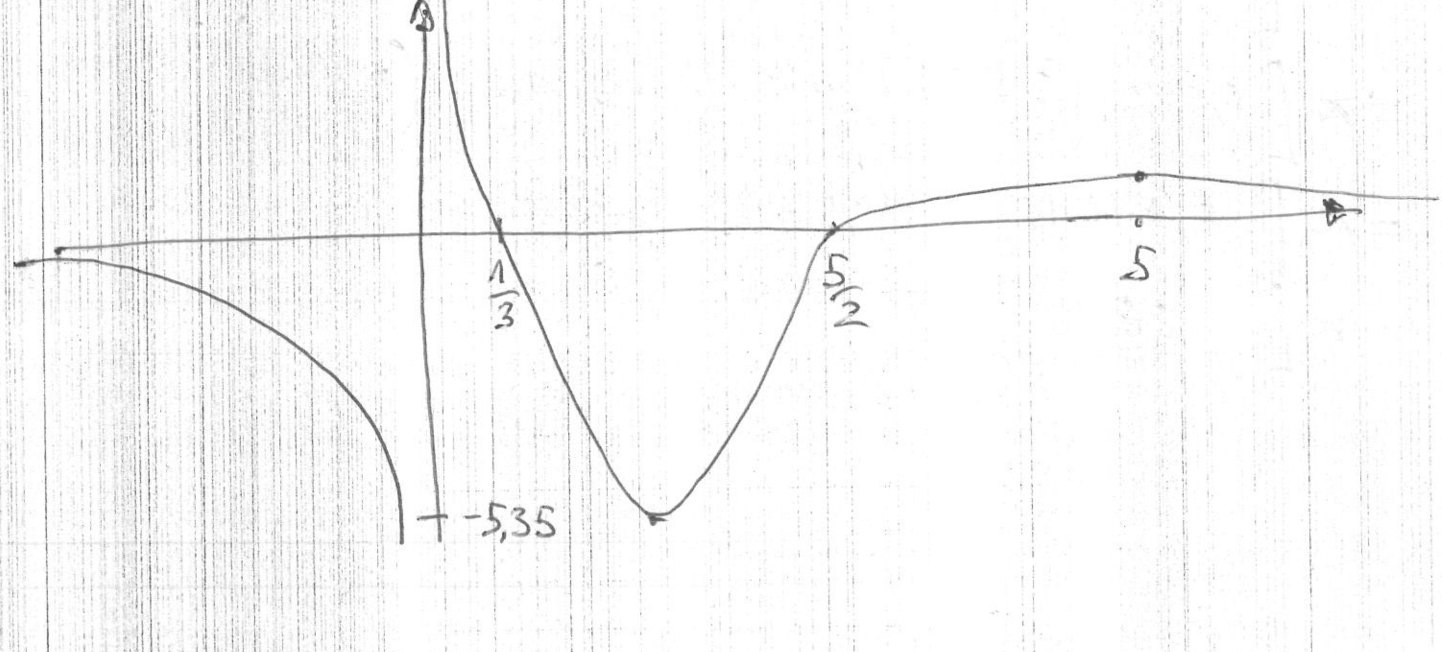
	0	1/3	5/2	
+	+	−	+	
−	+	+	+	
−	+	−	+	

$$f'(x) = \frac{(12x-17)3x^3 - (6x^2-17x+5)9x^2}{9x^6} = \frac{(12x^2-17x)-(18x^2-51x+15)}{3x^4}$$

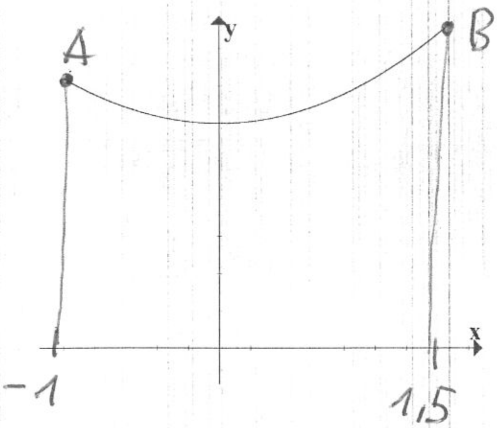
$$= \frac{-6x^2+34x-15}{3x^4}$$

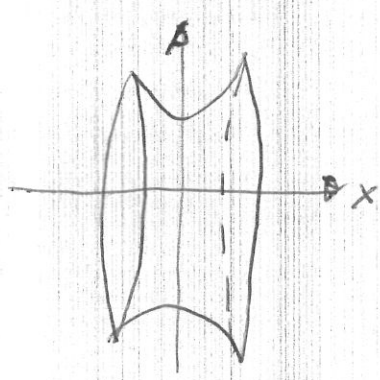
$$f'(x) = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{199}}{-6} = \frac{17}{6} \pm \frac{\sqrt{199}}{6} = 2{,}83 \pm 2{,}35 \begin{cases} 5{,}18 \\ 0{,}4822 \end{cases}$$

$f(5{,}18) \approx 0{,}1869$ $\quad f(0{,}4822) \approx -5{,}35$



Considerate l'arco (cioè il pezzo) della parabola di equazione $y = 0.6x^2 + 3$ con $x \in [-1; 1.5]$ (vedi figura). Se con A e B indichiamo i suoi estremi allora la coordinata x di A è -1 e la coordinata x di B è 1.5. Calcolate il volume del solido di rotazione che si ottiene ruotando questo arco di parabola di 360^0 (un giro completo) intorno all'asse x.





integrale necessario per calcolare il volume	
valore del volume	

Svolgimento:

$$\text{volume} = \pi \int_{-1}^{1,5} (0,6x^2+3)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1,5} (0,36x^4 + 9 + 3,6x^2) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{0,36}{5} x^5 + 9x + 1,2x^3 \right]_{-1}^{1,5} =$$

$$\pi \left[0,072 \left(1,5^5 - (-1)^5\right) + 9(1,5+1) + 1,2 \left(1,5^3 - (-1)^3\right) \right]$$

$$\simeq \pi \left[0,072 \, (7,59+1) + 9 \cdot 2,5 + 1,2 \cdot (3,37+1) \right]$$

$$= \pi \left[0,61848 + 22,5 + 5,244 \right]$$

$$= \pi \left[28,36 \right]$$

5) (7 punti) Considerate l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{1+x^2}+\sqrt{3}\right)dx$.

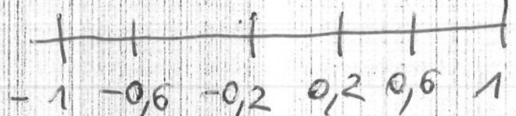
a) Calcolatelo tramite il metodo delle primitive;
b) Calcolatelo tramite il metodo del trapezio con $n = 5$.
(attenzione all'uso dei gradi e radianti)

primitiva
valore calcolato tramite metodo primitive
valore calcolato tramite metodo trapezio

Svolgimento: vanno sempre usati i radianti.

$$\int = 3\arctan x\Big]_{-1}^{1} + \sqrt{3}x\Big]_{-1}^{1} \approx 3\left(0{,}785-(-0{,}785)\right)+\sqrt{3}\cdot 2$$

$$\approx 8{,}1765$$



x	$f(x)$
-1	3,2321
$-0{,}6$	3,9379
$-0{,}2$	4,6167
$0{,}2$	4,6167
$0{,}6$	3,9379
1	3,2321

$$\int \approx \frac{0{,}4}{2}\Big(f(-1)+2f(-0{,}6)+2f(-0{,}2)+$$

$$+2f(0{,}2)+2f(0{,}6)+f(1)\Big)\approx 8{,}13652$$

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 4 Aprile 2018

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1 punto) Considerate la funzione f dell'esercizio 2. Dite per quali x la retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$ ha coefficiente angolare negativo.

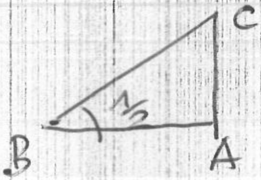
soluzione

$$m = f'(x) = -3 - 2\left(\frac{-2}{1-2x}\right) = \frac{6x+1}{1-2x}$$

$f'(x) < 0$ se $x < -\frac{1}{6}$ (Nota che f è definita solo se $x < \frac{1}{2}$)

1b) (1,5 punti) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\hat{B}C$ è 1/2 radiante e la lunghezza dell'ipotenusa è 10. Calcolare l'area del triangolo.

soluzione



$$AC = 10 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2} \sim 4{,}79$$

$$AB = 10 \cdot \cos\frac{1}{2} \sim 8{,}78$$

$$\text{Area} = \frac{AC \cdot AB}{2} = 50 \operatorname{sen}\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} \approx 21{,}036$$

1c) (1,5 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $y = \sqrt{x^3 e^x}$ nel punto $(1, \sqrt{e})$

soluzione

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 e^x}}\left(3x^2 e^x + x^3 e^x\right) = \frac{e^x x^2 (3+x)}{2x^{3/2} e^{\frac{x}{2}}} = \sqrt{e^x}\sqrt{x} \cdot \frac{3+x}{2}$$

$m = y'(1) = \sqrt{e} \cdot 2$

retta: $y - \sqrt{e} = 2\sqrt{e}(x-1)$ cioè $y = 2\sqrt{e}\,x - \sqrt{e}$ (o $y = 3{,}29x - 1{,}65$)

1d) (1,5 punti) Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{10 + x^3 + 2x}{2x^2}$.

soluzione

$$\int \frac{10+x^3+2x}{2x^2}\,dx = \int \frac{5}{x^2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x}\,dx = -\frac{5}{x} + \frac{x^2}{4} + \ln|x| + C$$

2) (6 punti) Sia
$$f(x) = -3x + 7 - 2\ln(1 - 2x).$$
Calcolate il valore massimo e il valore minimo di $f(x)$ quando $x \in [-3, 0]$. (Ricordatevi che la funzione logaritmo è definita solo se il suo argomento è positivo.)

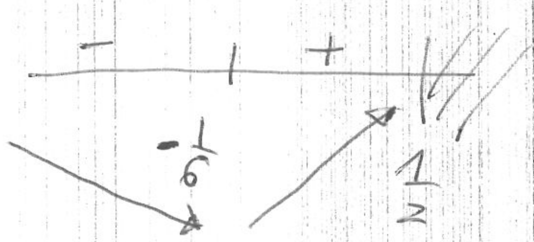
punto di massimo	; valore massimo=
punto di minimo	; valore minimo=

Svolgimento:

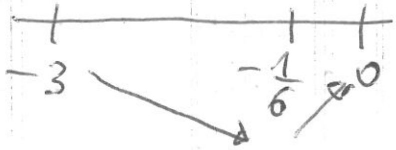
dominio : $x < \frac{1}{2}$

$$f' = -3 - 2\left(\frac{-2}{1-2x}\right) = \frac{6x+1}{1-2x}$$

segno di f' e crescenza di f



In $[-3,0]$



Quindi $x = -\frac{1}{6}$ è l'unico punto di min assoluto $f\left(-\frac{1}{6}\right) = -3\left(-\frac{1}{6}\right) + 7$

$$-2\ln\left(1 - 2\left(-\frac{1}{6}\right)\right) = \frac{1}{2} + 7 - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 6{,}92$$

Per trovare il max assoluto confronto $f(-3)$ e $f(0)$.

$f(0) = 7 - 2\ln 1 = 7$

$f(-3) = 9 + 7 - 2\ln\left(1 - 2(-3)\right) = 16 - 2\ln 7 = 12{,}108$

Quindi $x = -3$ è il punto di max assoluto

3) (8 punti) Sia $f(x) = \dfrac{8x^2-9}{4x^3} + \dfrac{3}{2x^2}$.

Il dominio di f è tutto $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f = 0$, $\lim_{x\to0^-} f = +\infty$, $\lim_{x\to0^+} f = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f = 0$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;

b) Scrivere f' e dire dove f cresce, dove decresce e dove f' è zero;

c) Disegnare il grafico di f (non tenendo conto della concavità)

f è positiva in $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(0,\frac{3}{4}\right)$	è negativa in altrove	è zero in $x=-\frac{3}{2}, +\frac{3}{4}$
derivata prima di f		
f cresce in	e decresce in	
valore di f nei punti critici		

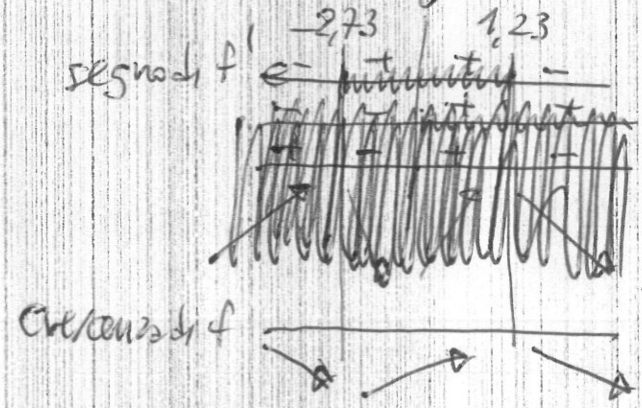
Svolgimento e grafico:

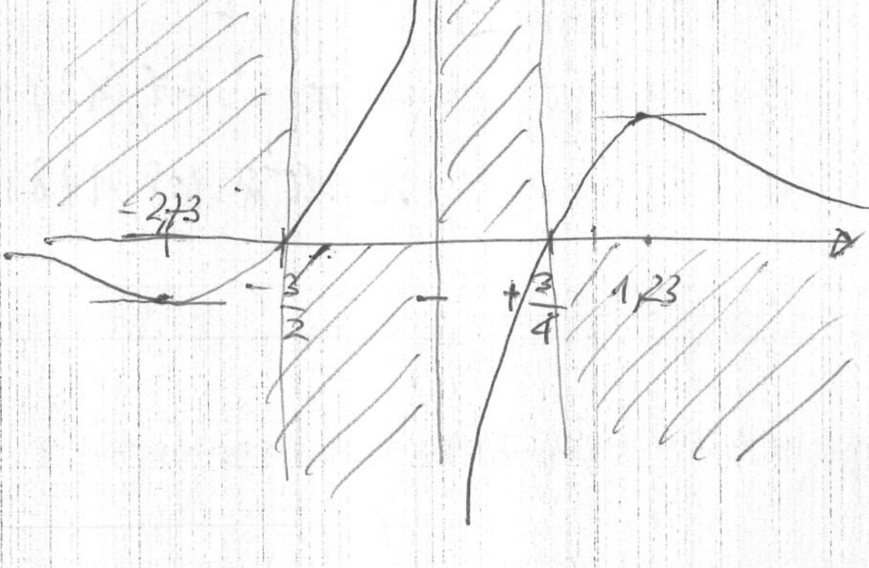
$$f(x) = \frac{8x^2-9+6x}{4x^3} \qquad f=0 \quad 8x^2-9+6x=0 \quad x = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{(16x+6)\,4x^3 - (8x^2+6x-9)\,12x^2}{16x^6} = \frac{4x^2\left[(16x+6)x - 3(8x^2+6x-9)\right]}{16x^6}$$

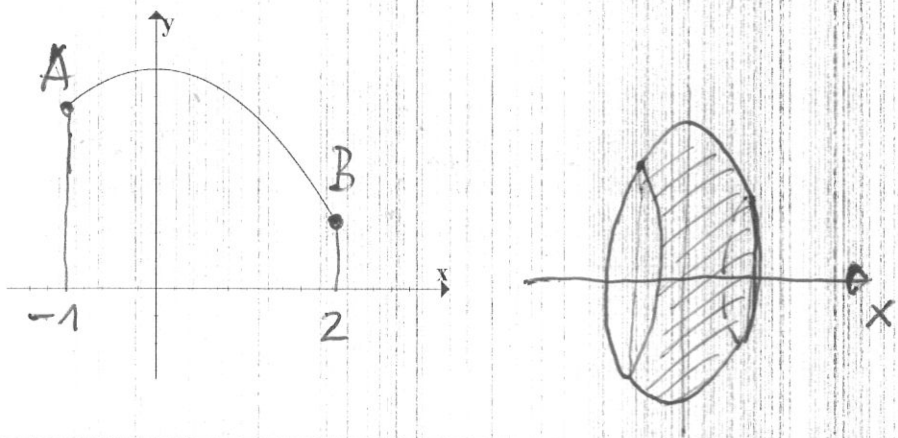
$$= \frac{-8x^2-12x+27}{4x^4} \qquad f'=0 \quad x \begin{cases} 1{,}23 \\ -2{,}73 \end{cases}$$

$f(1{,}23) \approx 1{,}40$, $f(-2{,}73) \approx -0{,}42$





4) (6 punti) Considerate l'arco (cioè il pezzo) della parabola di equazione $y = 4 - 0.7x^2$ con $x \in [-1; 2]$ (vedi figura). Se con A e B indichiamo i suoi estremi allora la coordinata x di A è -1 e la coordinata x di B è 2. Calcolate il volume del solido di rotazione che si ottiene ruotando questo arco di parabola di 360^0 (un giro completo) intorno all'asse x.



integrale necessario per calcolare il volume
valore del volume

Svolgimento:

$$\text{Volume} = \pi \int_{-1}^{2} (4-0{,}7x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{2} 16 + 0{,}49x^4 - 5{,}6x^2 \, dx$$

$$= \pi \left[16x + \frac{0{,}49}{5}x^5 - \frac{5{,}6}{3}x^3 \right]_{-1}^{2} = \pi \left[16(2+1) + \frac{0{,}49}{5}\left(2^5 - (-1)^5\right) + \right.$$

$$\left. - \frac{5{,}6}{3}\left(2^3 - (-1)^3\right) \right] = \pi \left[48 + 3{,}234 - 16{,}8 \right]$$

$$= \pi \cdot 34{,}434$$

$$\approx 108{,}178$$

5) (7 punti) Considerate l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(\pi + \frac{5}{(\cos x)^2}\right) dx.$

a) Calcolatelo tramite il metodo delle primitive;
b) Calcolatelo tramite il metodo dei punti medi con $n = 5$.
(attenzione all'uso dei gradi e radianti)

primitiva
valore calcolato tramite metodo primitive
valore calcolato tramite metodo dei punti medi

Svolgimento:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(\pi + 5 \cdot \frac{1}{(\cos x)^2}\right) dx = \Big[\pi x + 5 \tan x\Big]_{-1}^{0} = \pi(0-(-1))$

$+ 5(\tan(0) - \tan(-1)) = \pi - 5\tan(-1) \approx 10{,}93$

b) $\Delta x = \frac{1}{5} = 0{,}2$

$-0{,}9 \quad -0{,}7 \quad -0{,}5 \quad -0{,}3 \quad -0{,}1$

$-1 \quad -0{,}8 \quad -0{,}6 \quad -0{,}4 \quad -0{,}2 \quad 0$

x	$\pi + \frac{5}{(\cos x)^2}$
$-0{,}9$	~~[illegible]~~ $16{,}082$
$-0{,}7$	~~[illegible]~~ $11{,}689$
$-0{,}5$	~~[illegible]~~ $9{,}6338$
$-0{,}3$	$8{,}62$
$-0{,}1$	$8{,}1919$

$\int \approx \Delta x \big(f(-0{,}9) + f(-0{,}7) + f(-0{,}5) + f(-0{,}3) +$

$+ f(-0{,}1)\big) \approx 0{,}2\,(54{,}2167) = 10{,}8433$