Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 3 Aprile 2015

Domande brevi

1a) Scrivere un valore decimale approssimato (bastano 3 decimali) della soluzione dell'equazione $8\,4^x = 5$ (intendo 8 moltiplicato 4^x uguale a 5).

risposta

$4^x = 5/8$ $\quad x = \log_4\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{\log_{\cancel{40}\,10}(5/8)}{\log_{10}(4)} = \frac{-0{,}20412}{0{,}60206} =$

$= -0{,}33904$

1b) Calcolare la derivata seconda di $e^{2x}\sin(x)$ in $x = 0$

soluzione

$f'(x) = 2e^{2x}\,\text{sen}x + e^{2x}(+\cos x) = e^{2x}(2\,\text{sen}x + \cos x)$

$f'' = 2e^{2x}(2\,\text{sen}x + \cos x) + e^{2x}(2\cos x - \text{sen}x) = e^{2x}(4\,\text{sen}x$

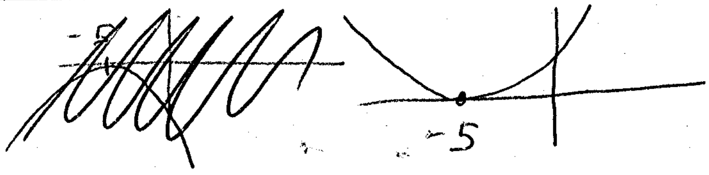
$+ 2\cos x + 2\cos x - \text{sen}x) = e^{2x}(3\,\text{sen}x + 4\cos x)$

$f''(0) = 1 \cdot 4$

1c) Risolvere la disequazione $x^2 + 10x + 25 \leq 0$.

soluzione

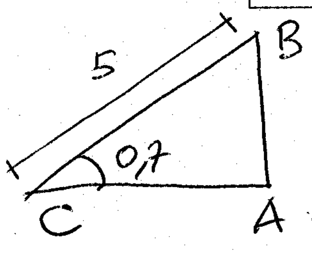
$\Delta = 0$



solo se $x = -5$

1d) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\hat{C}B$ è $0,7$ radianti e la lunghezza dell'ipotenusa BC è 5. Calcolare la lunghezza del cateto AC.

lunghezza (scriverla come numero decimale approssimato tramite la calcolatrice)



$\cos(0{,}7) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ $\qquad \overline{AC} = \overline{BC} \cdot \cos(0{,}7)$

$\approx 5 \cdot 0{,}76484 = 3{,}82421$

2) Considerate la tabella seguente

X	Y
-1	1
2	10
5	200

a) Calcolate la media e la varianza dei dati Y;
b) Studiate se la Y dipende in modo lineare dalla X: calcolate la retta di regressione lineare, calcolate il coefficiente R^2 e, sulla base di R^2, dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo lineare oppure no;
c) Studiate se la Y è una funzione esponenziale della X: calcolate il coefficiente R^2 corrispondente a questa interpolazione e dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo esponenziale oppure no;

media(Y)= ; varianza(Y)=

funzione lineare

equazione retta di regressione lineare:
R^2= ; Y dipende da X in modo lineare oppure no?

funzione esponenziale

R^2= ; Y dipende da X in modo esponenziale oppure no?

Svolgimento:

Compito 1

	X	Y	Z:=Log y	X^2	Y^2	XY	Z^2	ZX
	-1,00	1	0,00	1	1	-1	0,000	0,000
	2,00	10	1,00	4	100	20	1,000	2,000
	5,00	200	2,30	25	40000	1000	5,295	11,505
media	2,00	70,33	1,10	10,00	13367,00	339,67	2,10	4,50
varianza	6,00	8420,222	0,89					
dev stand	2,449	91,7617	0,9433					

regressione lineare

m= $\dfrac{\text{media xy-media(x)media(y)}}{\text{varianza(x)}} = \dfrac{199{,}000}{6{,}000} =$ 33,167

$\left(m = \dfrac{339{,}67 - 2 \cdot 70{,}33}{6} \right)$

q= media(y)-m*media(x) 4,000

$\left(q = 70{,}33 - 33{,}167 \cdot 2 \right)$

CP= $\dfrac{\text{media xy-media(x)media(y)}}{\text{devstand(x)devstand(y)}} = \dfrac{199{,}000}{224{,}770} =$ 0,885

$\left(CP = \dfrac{339{,}67 - 2 \cdot 70{,}33}{2{,}449 \cdot 91{,}7617} \right)$

CP calcolato da lui= 0,885

R^2= 0,784

regressione esponenziale

rq= 0,9943

CP= $\dfrac{\text{media(xz)-media(x)media(z)}}{\text{devstand(x)devstand(z)}} = \dfrac{2{,}3010}{2{,}3076} =$ 0,9972

$\left(CP = \dfrac{4{,}50 - 2 \cdot 1{,}10}{2{,}449 \cdot 0{,}9433} \right)$

CP calcolato da lui= 0,9972

R^2= 0,9943

3) Sia $f(x) = 2x + 6\ln(x^2+5) - 10$

a) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce e dove decresce;

b) Trovare tutti i punti in cui la derivata si annulla e per ciascuno di essi dire se è un minimo relativo, un massimo relativo oppure nessuno dei due;

c) Determinare i punti di massimo e minimo (assoluto) per f quando $x \in [-4; 0]$

derivata prima di f	
intervalli del dominio in cui f cresce	
e in cui f decresce	
punti in cui si annulla f' e loro classificazione	
punto di minimo assoluto nell'intervallo	valore
punto di massimo assoluto nell'intervallo	valore

Svolgimento:

$$f' = 2 + 6 \cdot \frac{2x}{x^2+5} = \frac{2(x^2+6x+5)}{x^2+5}$$

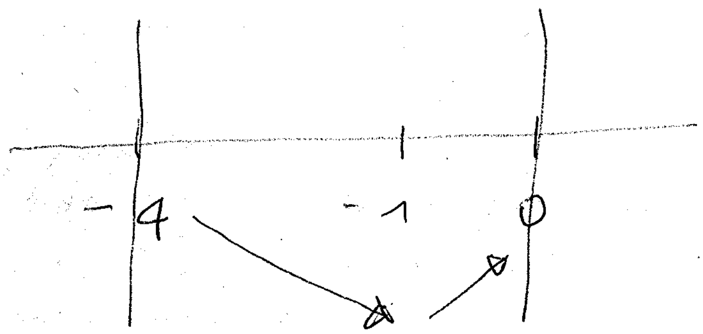
$$f' = 0 \iff x^2+6x+5=0 \quad \begin{cases} x=-5 \\ x=-1 \end{cases}$$

segno di f' $\quad + \quad -5 \quad - \quad -1 \quad +$

crescenza di f $\quad \nearrow \quad -5 \quad \searrow \quad -1 \quad \nearrow$

$x=-5$ punto di max relativo

$x=-1$ punto di min relativo



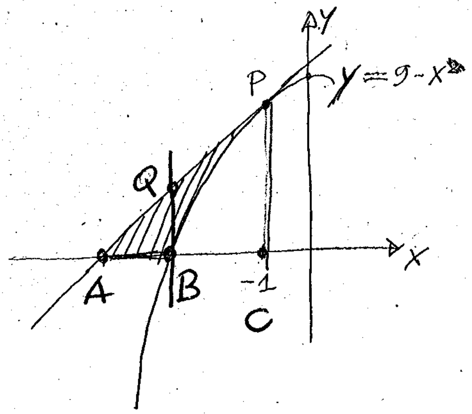
$x=-1$ è il punto di min assoluto, il valore min assoluto è uguale a $f(-1)$ cioè $-2+6\ln(6)-10 = -1,24$

Per determinare il max assoluto confrontiamo $f(-4)$ e $f(0)$

$f(0) = 6\ln(5)-10 = -0,3439$ $\quad f(-4) = -8+6\ln(21)-10 = 0,2671$

Quindi $x=-4$ è il punto di max assoluto. Il valore max assoluto è 0,2671.

4) Si considera la parabola $y = 9 - x^2$ e sia $P = (-1, 8)$ un punto della parabola. Calcolare l'area tratteggiata disegnata nella figura. La retta passante per il punto P è la retta tangente alla parabola e va calcolata



equazione della retta tangente alla parabola in P:
scrivete l'area tramite uno o più integrali:
valore dell'area:

Svolgimento:

Calcolo m della retta tangente $m = (9-x^2)'\big|_{x=-1} = -2x\big|_{x=-1}$ $= 2$ Allora eq della retta tangente $y - 8 = 2(x+1)$ cioè $y = 2x + 10$.

Ci sono vari modi di calcolare l'area. Ad esempio

Area cercata = area triangolo ABQ + area compresa tra retta e parabola (1) tra x_B e -1.

oppure

Area cercata = area triangolo ACP − area compresa tra asse x e parabola (2) tra x_B e -1.

In ogni caso mi serve sapere x_A e x_B:

$A = \begin{cases} y = 0 \\ y = 2x+10 \end{cases} \Rightarrow x_A = -5$

$B = \begin{cases} y = 0 \\ y = 9 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x_B = -3$

Allora area cercata $=$ area triangolo ABQ $+ \int_{-3}^{-1} (2x+10) - (9 - x^2)\, dx =$

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BQ} + \int_{-3}^{-1} 2x + 1 + x^2\, dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 +$

$+ \left[x^2 + x + \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{-1} = 4 + \left(\cancel{1} - \cancel{1} - \frac{1}{3}\right) - \left(\cancel{9} - 3 - \cancel{9}\right) = 4 - \frac{1}{3} + 3$

5) Calcolate $\int_{1,2}^{2} \left(\frac{1+\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{1+x^2} \right) dx$.

a) Calcolatene il valore esatto tramite il metodo delle primitive;
b) Calcolatene un valore approssimato tramite il metodo del trapezio con $n = 4$;
c) Calcolate la differenza tra il valore esatto e il valore approssimato.

Primitiva
Valore esatto dell'integrale

Valore approssimato ottenuto con il metodo del trapezio
Differenza tra i due valori

Svolgimento:

PRIMITIVE

$$\int_{1,2}^{2} \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} + 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = \left[\ln x + \underbrace{\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}}_{= 2\sqrt{x}} + 2 \arctan(x) \right]_{1,2}^{2}$$

$$= \ln(2) + 2\sqrt{2} + 2\,\mathrm{atan}(2) - \ln(1,2) - 2\sqrt{1,2} - 2\arctan(1,2)$$

$$= 5,7359 - 4,1253 = 1,6106$$

TRAPEZIO

1,2 1,4 1,6 1,8 2

$$\Delta x = \frac{2 - 1,2}{4} = 0,2$$

$$\int_{1,2}^{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{1+x^2}\, dx = \frac{0,2}{2} \left(\frac{1}{1,2} + \frac{1}{\sqrt{1,2}} + \frac{2}{1+(1,2)^2} + \right.$$

$$2\left(\frac{1}{1,4} + \frac{1}{\sqrt{1,4}} + \frac{2}{1+(1,4)^2} \right) + 2\,(\text{idem in } 1,6) + 2\,(\text{idem in } 1,8)$$

$$\left. + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{1+2^2} \right) = 0,1 \cdot \left(2,5659 + 2 \cdot 2,2351 + 2 \cdot 1,9779 \right.$$

$$\left. + 2 \cdot 1,7726 + 1,6071 \right) = 1,6143$$

Differenza $-0,0037$