COMPITO A

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 27 Gennaio 2016

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Calcolare media e varianza dei numeri $\{1, 3, 11\}$.

soluzione

$$\text{media}(X) = \frac{1+3+11}{3} = 5$$

$$\text{media}(X^2) = \frac{1+9+121}{3} = \frac{131}{3} = 43,\overline{6}$$

$$\text{Var}(X) = 43,\overline{6} - 25 = 18,\overline{6} = \frac{131}{3} - 25 = \frac{131-75}{3} = \frac{56}{3}$$

1b) (1,5 punti) Calcolare la derivata di $f(x) = xe^{(-x^2)}$ in $x = 1$

soluzione

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$$
$$= e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(1) = (1-2)e^{-1} = -\frac{1}{e} \simeq -0,36788$$

1c) (1,5 punti) La retta $y = 24x$ é tangente alla parabola $y = 6x^2$ nel punto $(1, 6)$? Spiegare perché.

soluzione

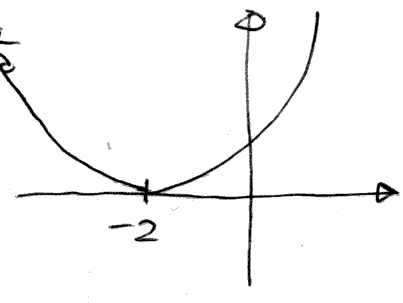
Il coeff. angolare di tale retta tangente è $f'(1)$ cioè $12x$ calcolato in $x=1$ cioè 12. Quindi $y=24x$ non è tangente alla parabola in $x=1$

1d) (1,5 punti) Risolvere la disequazione $x^2 + 4x + 4 < 0$.

soluzione

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \qquad x^2+4x+4=0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2$$

Parabola associata



Quindi la disequazione non è mai soddisfatta.

2) (5 punti) Sappiamo che il numero di batteri in una data coltura cresce seguendo una legge esponenziale. Inizialmente i batteri son 500 e dopo tre giorni sono diventati 1500.

a) Quanti batteri ci saranno dopo 6 giorni?
b) E dopo t giorni?
c) Dopo quanti giorni i batteri diventano esattamente 6000?

dopo 6 giorni:	4500
dopo t giorni:	$500(3)^{\frac{t}{3}}$
numero di giorni necessari per diventare 6000	6,78

Svolgimento:

Indichiamo con $b(t)$ il numero di batteri al tempo t

Sappiamo che $b(t) = a p^t$ per una opportuna scelta di a e di p.
Per capire come devono essere scelti sfruttiamo le due informazioni che abbiamo

$$b(0) = 500 \Rightarrow a p^0 = 500 \Rightarrow a \cdot 1 = 500$$
$$b(3) = 1500 \Rightarrow a p^3 = 1500 \Rightarrow 500 \cdot p^3 = 1500$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a = 500 \\ p^3 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a = 500 \\ p = \sqrt[3]{3} \end{array}$$

Allora $b(t) = 500 \left(\sqrt[3]{3}\right)^t$ o anche $b(t) = 500\,(3)^{\frac{t}{3}}$

Questo risponde al punto b) e ci permette di rispondere alle altre domande.

batteri dopo 6 giorni $= b(6) = 500\,(3)^{\frac{6}{3}} = 500 \cdot 3^2 = 4500$

tempo in cui i batteri sono 6000 = tempo in cui $b(t) = 6000$

$$500 \cdot 3^{\frac{t}{3}} = 6000$$
$$3^{\frac{t}{3}} = 12$$
$$\frac{t}{3} = \log_3 12$$
$$t = 3 \log_3 12 = 3 \frac{\ln 12}{\ln 3} = 6{,}78$$

3) (7 punti) Sia $f(x) = \dfrac{e^x(2x-3)}{x+2}$.

Il dominio di f è $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva	intervalli in cui è negativa
e x in cui f è zero	
derivata prima di f	
intervalli in cui f cresce	e in cui decresce
x in cui si annulla f' e valore di f in essi	

Svolgimento e grafico:

Segno di f :

		-2		$3/2$	
segno di e^x	$+$		$+$		$+$
segno di $2x-3$	$-$		$-$		$+$
segno di $x+2$	$-$		$+$		$+$
segno di f	$+$		$-$		$+$

Calcolo di f'

$$\frac{(e^x(2x-3))'(x+2) - e^x(2x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{(e^x(2x-3)+e^x\cdot 2)(x+2) - e^x(2x-3)}{(x+2)^2}$$

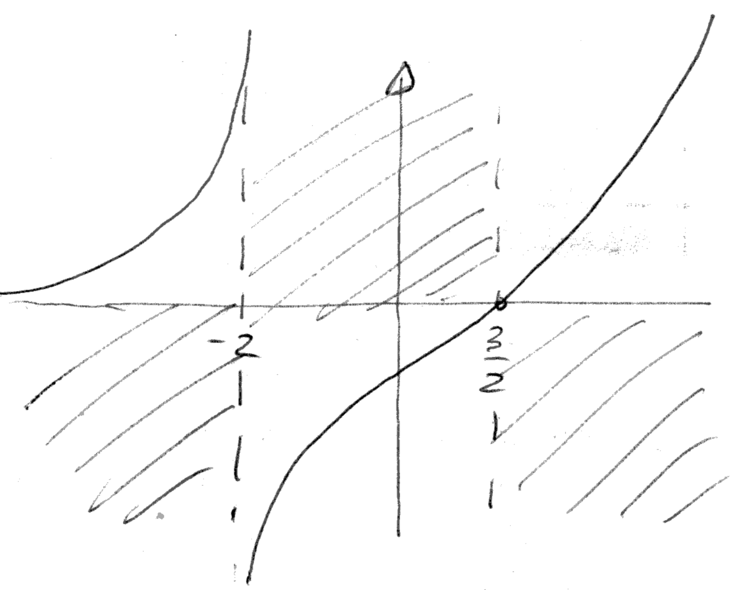
$$= e^x\left[(2x-3+2)(x+2) - (2x-3)\right]/(x+2)^2$$

$$= e^x(2x^2+x+1)/(x+2)^2$$

Segno di f'

e^x	$+$	$+$	$+$
$2x^2+x+1$	$+$	$+$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$+$	$+$

f crescente sempre



4) (6 punti) Sia $f(x) = (x^2 - 1)\left(x+4\right)^5$

a) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce e dove decresce;
b) Trovare **i tre punti** in cui la derivata si annulla e per ciascuno di essi dire se è un minimo relativo, un massimo relativo oppure nessuno dei due;
c) Determinare i punti di massimo e minimo (assoluto) per f quando $x \in [-5; -1]$

derivata prima di f	
intervalli del dominio in cui f cresce	
e in cui f decresce	
punti in cui si annulla f' e loro classificazione	
punto di minimo assoluto nell'intervallo	valore
punto di massimo assoluto nell'intervallo	valore

Svolgimento:

$$f'(x) = 2x \cdot (x+4)^5 + (x^2-1)\left((x+4)^5\right)' = 2x\cdot(x+4)^5 + (x^2-1)\,5(x+4)^4 \cdot 1$$
$$= (x+4)^4\left[2x(x+4) + (x^2-1)\cdot 5\right] = (x+4)^4\left(7x^2+8x-5\right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+4) = 0 \rightarrow x = -4 \\ 7x^2+8x-5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{51}}{7} \end{cases}$$

$x = -1,591$ / $x = +0,449$

segno di f'

	-4		$-1,591$		$0,449$	
$(x+4)^4$	$+$	$+$		$+$		$+$
$7x^2+8x-5$	$+$	$+$		$-$		$+$
f'	$+$	$+$		$-$		$+$
	↗	↗		↘		↗

Quindi $x = -4$ non è ne min ne max locale
$x = -1,591$ max locale
$x = 0,449$ min locale

Nell'intervallo $[-5,-1]$ l'andamento della funzione è

-5 ↗ -4 ↗ $-1,591$ ↘ -1

Quindi il punto di max assoluto è certamente $-1,591$. Per trovare il punto di min assoluto si devono confrontare $x=-5$ e $x=-1$

$f(-5) = -24$ Quindi il punto di min assoluto è $x=-5$
$f(-1) = 0$

Nota $f(-1,591) \approx 124$

5) (8 punti) Calcolate $\int_1^3 \left(2+\frac{1}{x}\right)^2 + \ln 2 \, dx$.

a) Calcolatene il valore esatto tramite il metodo delle primitive;
b) Calcolatene un valore approssimato tramite il metodo del trapezio con $n = 5$;
c) Calcolate la differenza tra il valore esatto e il valore approssimato e confrontate questa differenza con l'errore teorico stimato dal Teorema sull'errore di approssimazione per quel metodo.

Primitiva	
Valore esatto dell'integrale	

Valore approssimato ottenuto	
Differenza tra i due valori	
Stima dell'errore teorico	

Svolgimento:

Per calcolare la primitiva serve sviluppare il quadrato e osservare che $\ln 2$ è una costante. Allora

$$\int_1^3 \left(2+\frac{1}{x}\right)^2 + \ln 2 \, dx = \int_1^3 \left(4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+\ln 2\right) dx = \left[4x + 4\ln x - \frac{1}{x} + (\ln 2)x\right]_1^3$$

$$= (12-4) + 4(\ln 3 - \ln 1) + \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{1}\right) + \ln 2\,(3-1)$$

$$= 8 + 4\ln 3 + \frac{2}{3} + 2\ln 2 \approx 14{,}44741$$

$$\Delta x = \frac{3-1}{5} = 0{,}4$$

1 1,4 1,8 2,2 2,6 3

x	$f(x)$
1	9,69315
1,4	8,06049
1,8	7,22401
2,2	6,71794
2,6	6,37954
3	6,13759

$$\text{Integrale} \approx \frac{\Delta x}{2}\Big(f(1) + 2f(1,4) + 2f(1,8) + 2f(2,2) + 2f(2,6) + f(3)\Big) = 0{,}4\,(9{,}69315 + 16{,}12099 + 14{,}44802 + 13{,}43588 + 12{,}75908 + 6{,}13759) =$$

$$= 14{,}51894$$

|differenza tra valore esatto e approssimato| = 0,07153

Per calcolare l'errore teorico mi serve calcolare una costante più grande del massimo del valore assoluto della derivata seconda di $\left(2+\frac{1}{x}\right)^2 + \ln 2$ in $[1,3]$

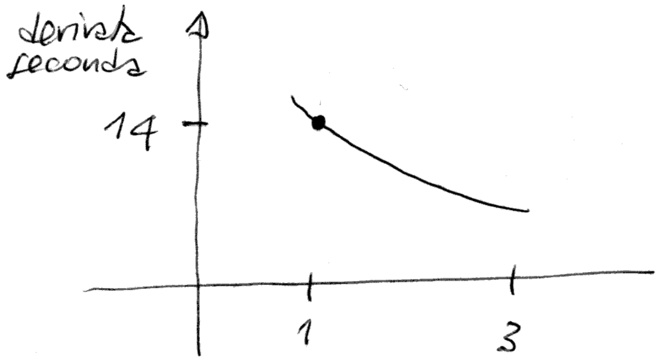
segue a pagina dietro

La derivata seconda di $4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+\ln 2$ è $\frac{8}{x^3}+\frac{6}{x^4}$

In $[1,3]$ tale funzione è positiva. Inoltre è decrescente

Allora il massimo del suo valore assoluto è in $x=1$

dove vale $8+6$ cioè 14



La stima teorica dice che

$$|\text{Errore}| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

dove K è la costante che abbiamo appena trovato e a e b son gli estremi di integrazione

Quindi in questa situazione

$$|\text{Errore}| \le \frac{14\cdot(3-1)^3}{12\cdot 5^2} = \frac{14\cdot 8}{12\cdot 25} = 0,37\overline{3}$$

L'errore commesso in concreto in questo caso è quindi molto minore di quello ~~teorico~~ dato dal teorema.

COMPITO B

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 27 Gennaio 2016

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Calcolare media e varianza dei numeri $\{2, -4, 11\}$.

soluzione

$\text{media}(x) = \frac{2-4+11}{3} = 3$

$\text{media}(x^2) = \frac{4+16+121}{3} = 47$

$\text{varianza}(x) = 47 - 3^2 = 38$

1b) (1,5 punti) Calcolare la derivata di $f(x) = xe^{(2x^2)}$ in $x = 1$

soluzione

$f'(x) = 1 \cdot e^{2x^2} + x\left(e^{2x^2}\right)' = e^{2x^2} + x \cdot e^{2x^2} \cdot 4x$

$= e^{2x^2} + 4x^2 e^{2x^2}$

$f'(1) = e^2 + 4e^2 = 5e^2 \approx 36,945$

1c) (1,5 punti) La retta $y = -6x - 3$ é tangente alla parabola $y = 3x^2$ nel punto $(-1, 3)$? Spiegare perché.

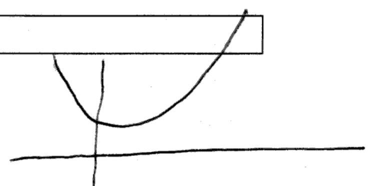
soluzione

Il coeff. angolare di tale tangente è $= f'(-1)$ cioè $6x$ calcolato in $x = -1$, cioè -6. La retta $y = -6x - 3$ ha quindi il coeff. angolare giusto. e inoltre, come è facile verificare, passa per $(-1, 3)$. Tale retta è quindi la tangente

1d) (1,5 punti) Risolvere la disequazione $x^2 + x + 4 \geq 0$.

soluzione

$\Delta = 1 - 4 \cdot 4 < 0$ parabola associata



Allora ~~Ok~~ la disequazione è vera per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2) (5 punti) Sappiamo che il numero di batteri in una data coltura cresce seguendo una legge esponenziale. Inizialmente i batteri son 800 e dopo 4 giorni sono diventati 3200.

a) Quanti batteri ci saranno dopo 8 giorni?
b) E dopo t giorni?
c) Dopo quanti giorni i batteri diventano esattamente 8000?

dopo 8 giorni:	12800
dopo t giorni:	$800\,(4)^{t/4}$
numero di giorni necessari per diventare 8000	6,64

Svolgimento:

$$b(t) = a\,p^t$$

$$b(0) = 800 \quad b(4) = 3200 \Rightarrow \begin{cases} a\,p^0 = 800 \\ a\,p^4 = 3200 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 800 \\ 800 \cdot p^4 = 3200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 800 \\ p^4 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 800 \\ p = \sqrt[4]{4} \end{cases}$$

Quindi $b(t) = 800\left(\sqrt[4]{4}\right)^t = 800\,4^{\frac{t}{4}}$

Allora $b(8) = 800\,4^{\frac{8}{4}} = 800 \cdot 16 = 12800$

tempo in cui $b(t) = 8000$

$$800 \cdot 4^{\frac{t}{4}} = 8000$$

$$4^{\frac{t}{4}} = 10$$

$$\frac{t}{4} = \log_4 10$$

$$t = 4 \cdot \log_4 10 = 4 \cdot \frac{\ln 10}{\ln 4} \approx 6,64$$

3) (7 punti) Sia $f(x) = \dfrac{xe^x}{x-1}$.

Il dominio di f è $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;

b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;

c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva	intervalli in cui è negativa
e x in cui f è zero	
derivata prima di f	
intervalli in cui f cresce	e in cui decresce
x in cui si annulla f' e valore di f in essi	

Svolgimento e grafico:

segno di f

	0		1	
segno di x	$-$	$+$		$+$
" " xe^x	$+$	$+$		$+$
" " $x-1$	$-$	$-$		$+$
" " f	$+$	$-$		$+$

$$f' = \frac{(xe^x)'(x-1) - xe^x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(1\cdot e^x + xe^x)(x-1) - xe^x}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{e^x\left[(1+x)(x-1) - x\right]}{(x-1)^2} = \frac{e^x\,(x^2-x-1)}{(x-1)^2}$$

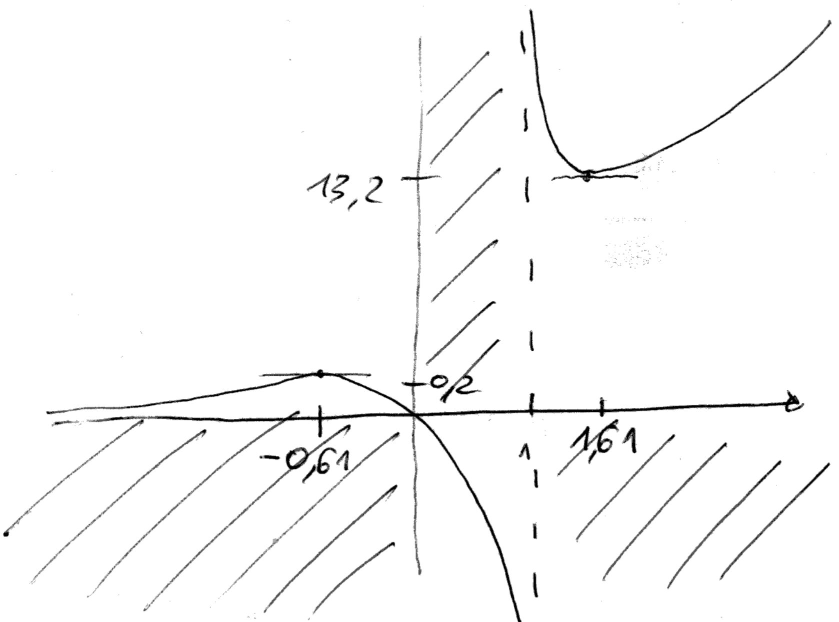
$f' = 0 \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61,\ -0{,}61$

segno di f'

	$-0{,}61$		$1{,}61$	
e^x	$+$	$+$		$+$
x^2-x-1	$+$	$-$		$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$		$+$
f'	$+$	$-$		$+$

$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 13{,}2$

$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0{,}2.$



4) (6 punti) Sia $f(x) = (x^2 - 1)\left(x - 4\right)^4$

a) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce e dove decresce;
b) Trovare **i tre punti** in cui la derivata si annulla e per ciascuno di essi dire se è un minimo relativo, un massimo relativo oppure nessuno dei due;
c) Determinare i punti di massimo e minimo (assoluto) per f quando $x \in [2; 5]$

derivata prima di f	
intervalli del dominio in cui f cresce	
e in cui f decresce	
punti in cui si annulla f' e loro classificazione	
punto di minimo assoluto nell'intervallo	valore
punto di massimo assoluto nell'intervallo	valore

Svolgimento:

$$f'(x) = 2x\,(x-4)^4 + (x^2-1)\cdot 4(x-4)^3\cdot 1 = (x-4)^3\left[2x(x-4) + 4(x^2-1)\right]$$
$$= (x-4)^3(6x^2-8x-4)$$

$f'(x)=0 \Rightarrow$ o $(x-4)^3 = 0$ cioè $x=4$

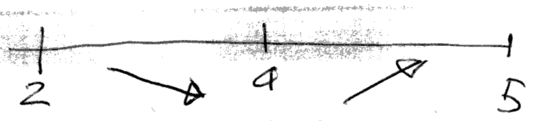
o $6x^2-8x-4=0$ cioè $x = \dfrac{2\pm\sqrt{10}}{3}$ $\begin{cases} 1{,}721 \\ -0{,}387 \end{cases}$

Segno di f'

	$-0{,}387$	$1{,}721$	4	
$(x-4)^3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$6x^2-8x-4$	$+$	$-$	$+$	$+$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$
crescenza di f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Quindi $x=-0{,}387$ e $x=4$ sono punti di minimo locale mentre $x=1{,}721$ è di massimo locale

Per quel che riguarda il max e min assoluto in $[2,5]$ in questo intervallo l'andamento è



Quindi il punto di min assoluto è $x=4$ in cui f vale 0

i candidati per punti di massimo assoluto sono $x=2$ e $x=5$. Poiché

$f(2) = 48$
$f(5) = 24$

il punto di max assoluto è $x=2$.

5) (8 punti) Calcolate $\int_1^3 \left(2\sqrt{x}+1\right)^2 + e^2\, dx$.

a) Calcolatene il valore esatto tramite il metodo delle primitive;
b) Calcolatene un valore approssimato tramite il metodo dei punti medi con $n = 5$;
c) Calcolate la differenza tra il valore esatto e il valore approssimato e confrontate questa differenza con l'errore teorico stimato dal Teorema sull'errore di approssimazione per quel metodo.

Primitiva	
Valore esatto dell'integrale	

Valore approssimato ottenuto	
Differenza tra i due valori	
Stima dell'errore teorico	

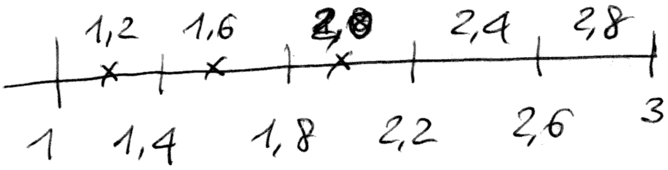
Svolgimento:

$$\int_1^3 (2\sqrt{x}+1)^2 + e^2\, dx = \int_1^3 4x + 4\sqrt{x} + 1 + e^2\, dx = \left[2x^2 + \frac{4}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + (1+e^2)x\right]_1^3$$

$$= \left[2x^2\ \frac{8}{3} x\sqrt{x} + (1+e^2)x\right]_1^3 = 2\cdot(9-1) + \frac{8}{3}(3\sqrt{3}-1) + (1+e^2)(3-1)$$

$$= 16 + 8\sqrt{3} - \frac{8}{3} + (1+e^2)2 = 43{,}96786$$

$$\Delta x = \frac{3-1}{5} = 0{,}4$$



x	f(x)
1,2	17,57084
1,6	19,84870
2	22,04591
2,4	24,18583
2,8	26,28234

Integrale $\approx \Delta x\, \left(f(1,2) + f(1,6) + f(2) + f(2,4) + f(2,8)\right)$

$= 43{,}97345$

$|\text{Differenza}| = 0{,}00560$

Il teorema dice che $|\text{differenza}| \le \dfrac{K\,(b-a)^3}{24\, n^2}$

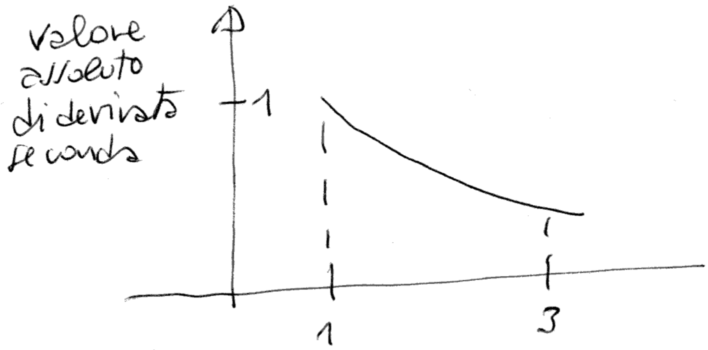
dove K è il massimo del valore assoluto della derivata seconda in $[a,b]$. della funzione di cui si calcola l'integrale. (segue dietro)

La derivata seconda è $-x^{-\frac{3}{2}}$ cioè $-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

È una funzione negativa in $[1,3]$. Il suo valore assoluto in $[1,3]$ è $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$. Questa funzione è decrescente e quindi il suo massimo in $[1,3]$ si ha quando $x = 1$,

il valore in $x=1$ è 1.

Allora $K=1$.



Quindi $|\text{Errore dato dal teorema}| \leq \dfrac{1 \cdot (3-1)^3}{24 \cdot 5^2} = \dfrac{8}{24 \cdot 25} = 0{,}1\overline{3}$

COMPITO C

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 27 Gennaio 2016

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Calcolare media e varianza dei numeri $\{-3, 3, 12\}$.

soluzione

$$\text{media}(x) = \frac{-3+3+12}{3} = 4$$

$$\text{media}(x^2) = \frac{9+9+144}{3} = 54$$

$$\text{varianza}(x) = 54 - 16 = 38$$

1b) (1,5 punti) Calcolare la derivata di $f(x) = x\sin(x^2)$ in $x = 1$

soluzione

$$f'(x) = \text{sen}(x^2) + x \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$f'(1) = \text{sen}(1) + 2\cos(1) = 1{,}9220$$

1c) (1,5 punti) La retta $y = -2x$ é tangente alla parabola $y = -2x^2$ nel punto $(1, -2)$? Spiegare perché.

soluzione

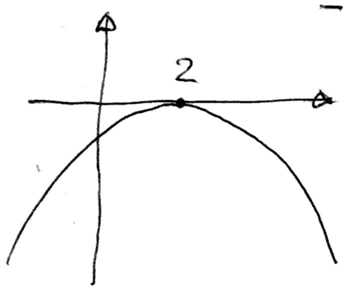
La retta tangente passa per $(1,-2)$ e ha coeff. angolare uguale alla derivata prima di $-2x^2$ calcolata in $x=1$ cioè uguale a -4. La retta $y=-2x$ ha coeff. angolare -2 e quindi non è la retta tangente.

1d) (1,5 punti) Risolvere la disequazione $-x^2 + 4x - 4 < 0$.

soluzione

$$\Delta = 16 - 4(+4) = 0 \qquad x = \frac{-4 \pm 0}{-2} = 2$$

Parabola associata



Allora la disequazione è soddisfatta per ogni $x \neq 2$.

2) (5 punti) Sappiamo che il numero di batteri in una data coltura cresce seguendo una legge esponenziale. Inizialmente i batteri son 1000 e dopo tre giorni sono diventati 4000.

a) Quanti batteri ci saranno dopo 6 giorni?
b) E dopo t giorni?
c) Dopo quanti giorni i batteri diventano esattamente 12000?

dopo 6 giorni:	16.000
dopo t giorni:	$1000 \cdot 4^{\frac{t}{3}}$
numero di giorni necessari per diventare 12000	5,377

Svolgimento:

$B(t) = a\, p^t$

Per determinare le costanti a e p sfruttiamo i dati

$$\begin{matrix} B(0) = 1000 \\ B(3) = 4000 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a p^0 = 1000 \\ a p^3 = 4000 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1000 \\ 1000\, p^3 = 4000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1000 \\ p^3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1000 \\ p = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

Allora $B(t) = 1000 \left(\sqrt[3]{4}\right)^t$ cioè $B(t) = 1000 (4)^{\frac{t}{3}}$

Quando $t = 6$ ho che $B(6) = 1000 \cdot 4^{\frac{6}{3}} = 1000 \cdot 16 = 16.000$

Per trovare il tempo per cui $B(t)$ è 12.000 risolvo l'equazione

$$1000\, 4^{\frac{t}{3}} = 12.000$$

$$4^{\frac{t}{3}} = 12$$

$$\frac{t}{3} = \log_4 12$$

$$t = 3 \log_4 12 = 3\, \frac{\ln 12}{\ln 4} = 5,377$$

3) (7 punti) Sia $f(x) = \dfrac{2x-3}{xe^x}$.

Il dominio di f è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva	intervalli in cui è negativa
e x in cui f è zero	
derivata prima di f	
intervalli in cui f cresce	e in cui decresce
x in cui si annulla f' e valore di f in essi	

Svolgimento e grafico:

segno di f

		0		3/2	
$2x-3$	$-$		$-$		$+$
x	$-$		$+$		$+$
e^x	$+$		$+$		$+$
f	$+$		$-$		$+$

$$f' = \frac{(2x-3)'\,xe^x - (2x-3)(xe^x)'}{x^2e^{2x}} = \frac{2xe^x - (2x-3)(e^x + xe^x)}{x^2e^{2x}} =$$

$$= \frac{e^x\left[2x - (2x-3)(1+x)\right]}{x^2e^{2x}} = \frac{-2x^2+3x+3}{x^2e^x}$$

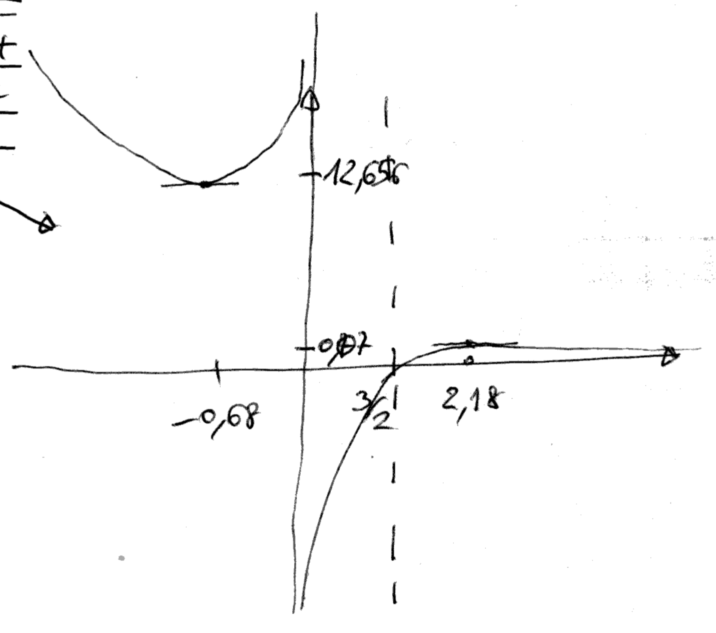
$f' = 0 \quad -2x^2+3x+3 = 0 \qquad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{4} <$ 2,18 ; −0,68

segno di f'

		−0,68		0		2,18	
$-2x^2+3x+3$	$-$		$+$		$+$		$-$
x^2	$+$		$+$		$+$		$+$
e^x	$+$		$+$		$+$		$+$
f'	$-$		$+$		$+$		$-$
crescenza	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(-0{,}68) \approx 12{,}656$

$f(2{,}18) \approx 0{,}07$



4) (6 punti) Sia $f(x) = (x^2 - 9)\left(x - 1\right)^4$

a) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce e dove decresce;
b) Trovare **i tre punti** in cui la derivata si annulla e per ciascuno di essi dire se è un minimo relativo, un massimo relativo oppure nessuno dei due;
c) Determinare i punti di massimo e minimo (assoluto) per f quando $x \in [0; 3]$

derivata prima di f	
intervalli del dominio in cui f cresce	
e in cui f decresce	
punti in cui si annulla f' e loro classificazione	
punto di minimo assoluto nell'intervallo	valore
punto di massimo assoluto nell'intervallo	valore

Svolgimento:

$$f'(x) = 2x(x-1)^4 + (x^2-9)\,4(x-1)^3 \cdot 1 = (x-1)^3\left[2x(x-1) + 4(x^2-9)\right]$$

$$= (x-1)^3\left(6x^2 - 2x - 36\right)$$

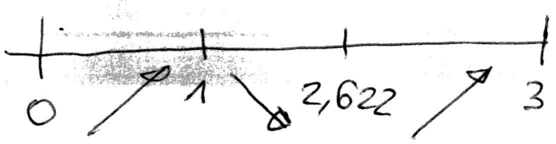
$$f' = 0 \begin{cases} (x-1)^3 = 0 \longrightarrow x = 1 \\ 3x^2 - x - 18 = 0 \longrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+54\cdot 4}}{6} = \dfrac{1 \pm \sqrt{217}}{6} \begin{cases} 2{,}622 \\ -2{,}288 \end{cases} \end{cases}$$

segno di f'

		$-2{,}28$		1		$2{,}622$	
$(x-1)^3$	$-$		$-$		$+$		$+$
$6x^2-2x-36$	$+$		$-$		$-$		$+$
f'	$-$		$+$		$-$		$+$
crescenza di f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Quindi $x = -2{,}28$ e $x = 2{,}622$ sono punti di minimo locale mentre $x = 1$ è punto di massimo locale

Nell'intervallo $[0, 3]$ il comportamento della funzione è



Calcolo il valore di f nei punti 0, 1, 2,622 e 3

$f(0) = -9$

$f(1) = 0$

$f(2{,}622) = -14{,}7$

$f(3) = 0$

Allora $x = 2{,}622$ è punto di minimo assoluto mentre sia $x = 1$ che $x = 3$ sono punti di massimo assoluto.

5) (8 punti) Calcolate $\int_1^2 \left(\frac{2}{x}+x\right)^2 + \ln 4 \, dx$.

a) Calcolatene il valore esatto tramite il metodo delle primitive;
b) Calcolatene un valore approssimato tramite il metodo del trapezio con $n = 5$;
c) Calcolate la differenza tra il valore esatto e il valore approssimato e confrontate questa differenza con l'errore teorico stimato dal Teorema sull'errore di approssimazione per quel metodo.

Primitiva
Valore esatto dell'integrale

Valore approssimato ottenuto
Differenza tra i due valori
Stima dell'errore teorico

Svolgimento:

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x}+x\right)^2 + \ln 4 \, dx = \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} + x^2 + 4 + \ln 4\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{4}{x} + \frac{x^3}{3} + (4+\ln 4)x\right]_1^2 = \left(-\frac{4}{2}+\frac{4}{1}\right) + \left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) + (4+\ln 4)[2-1]$$

$$= 2 + \frac{7}{3} + 4 + \ln 4 = 6 + \frac{7}{3} + \ln 4 = 9,71962$$

$$\Delta x = \frac{2-1}{5} = 0,2$$

1   1,2   1,4   1,6   1,8   2

x	f(x)
1	10,38629
1,2	9,60407
1,4	9,38711
1,6	9,50879
1,8	9,86086
2	10,38629

$$\text{Integrale} \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)\right) = 9,74943$$

$$|\text{Differenza}| = 0,02980$$

$$|\text{Errore teorico}| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

dove K è il massimo del valore assoluto della derivata seconda della funzione che integriamo

vedi retro

In questo caso la derivata seconda è $\frac{24}{x^4}+2$

In $[1,2]$ tale funzione è positiva ed è decrescente.
Il suo valore massimo quindi si ha quando $x=1$ e tale valore è 26. Allora

$$|\text{Errore teorico}| \leq \frac{26\cdot(2-1)^3}{12\cdot 5^2} = \frac{26}{12\cdot 25} = 0{,}08\overline{6}$$

L'errore in questa situazione concreta è quindi meno della metà dell'errore teorico.