Nome: Corso di laurea:

Corso di Matematica, Simulazione di prova scritta - 25 gennaio 2010
Corsi di laurea in Alimentari e Viticoltura ed Enologia

1) (4 punti) Nel 1998 l'inflazione in Nicaragua era così alta che i prezzi raddoppiavano ogni 54 giorni. Sapendo che un oggetto all'inizio del 1998 costa 10, trovare la funzione che rappresenta il suo prezzo dopo x giorni dall'inizio del 1998. Dopo quanti giorni il prezzo è diventato 60? (Scrivere la risposta sia usando l'espressione esatta, sia calcolandone il valore approssimato usando la calcolatrice.)

2) (2.5 punti) Calcolare la derivata seconda della funzione $\tan(x)$

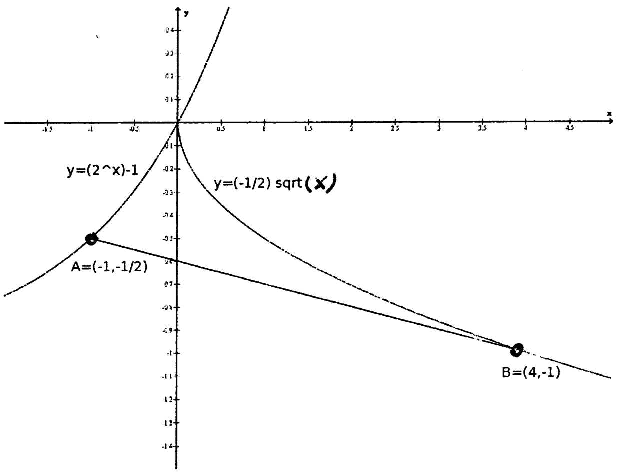
3) Sia $f(x) := \dfrac{x^2-1}{e^{(x^2)}}$. La funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ e inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

(1) (1.5 punti) dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;
(2) (3.5 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
(3) (2.5 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

4) (4 punti) Un triangolo rettangolo ha il cateto orizzontale lungo $30cm$ e il cateto verticale di lunghezza che cresce alla velocità di $2cm$ al secondo. Dire con che velocità cresce l'ipotenusa di questo triangolo quando il cateto verticale è $10cm$. (Ricordo che ipotenusa $= \sqrt{(\text{cateto orizz.})^2 + (\text{cateto verticale})^2}$.)

5) (5 punti) Trovare il punto di massimo assoluto per la funzione $(3+x)^3(3-x)^5$ nell'intervallo $[-3,3]$. (Suggerimento: dopo aver calcolato la derivata non sviluppare le potenze ma invece metterle in evidenza.)

6) (5 punti) Calcolare l'area dell'insieme in figura, delimitato dal segmento con estremi $A = (-1,-1/2)$ e $B = (4,-1)$ e dai grafici di $(-1/2)\sqrt{x}$ e $2^x - 1$. (Suggerimento: dovete calcolare l'equazione della retta per A e B.)



7) Si prende la parte del grafico di $\sin(x)$ compresa tra $x = 0$ e $x = \pi$ e lo si ruota di un giro completo intorno all'asse x ottenendo un solido di rotazione avente come asse di rotazione l'asse x.

(1) (2 punti) scrivere l'integrale che esprime il volume di tale solido;
(2) (4 punti) calcolarne una approssimazione di tale integrale tramite la regola di Simpson con $n = 4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

① Il costo dopo x giorni è

$$C(x) = \text{costo iniziale} \cdot (2)^{\frac{x}{\text{tempo di raddoppiamento}}} = 10(2)^{\left(\frac{x}{54}\right)}$$

Per sapere dopo quanti giorni il costo è 60 devo risolvere l'equazione

$$10 \cdot 2^{\left(\frac{x}{54}\right)} = 60, \quad \text{cioè} \quad 2^{\left(\frac{x}{54}\right)} = 6, \quad \text{cioè} \quad \frac{x}{54} = \log_2 6$$

$x = 54 \cdot \log_2 6$.

Per calcolarne il valore numerico usando la calcolatrice scrivo

$$x = 54 \cdot \log_2 6 = 54 \cdot \frac{\ln 6}{\ln 2} = \frac{1.7917}{0.6931} \cdot 54 = 139,58$$

Il costo è 60 dopo 139,58 giorni.

② La derivata prima di $\tan(x)$ è $\frac{1}{\cos^2(x)}$. Quindi la derivata seconda è (regola del rapporto + regola funzioni composte)

$$\frac{0 \cdot \cos^2(x) - 1\left(2\cos(x) \cdot (-\operatorname{sen} x)\right)}{\cos^4(x)} = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3(x)}$$

③ 1) ~~segno di~~ $f = 0 \to x^2 - 1 = 0$, cioè $x = \pm 1$

		-1		1	
segno di x^2-1	+		−		+
segno di e^{x^2}	+		+		+
segno di f	+		−		+

Quindi il grafico di f interseca l'asse x in $x = -1$ e $x = +1$ e sta sopra l'asse x in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e sotto in $(-1, 1)$

2) $$f' = \frac{2x \cdot e^{x^2} - (x^2-1) \cdot (e^{x^2} \cdot 2x)}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{e^{x^2} 2x \left(1 - x^2 + 1\right)}{\left(e^{x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2x(2-x^2)}{e^{x^2}}.$$

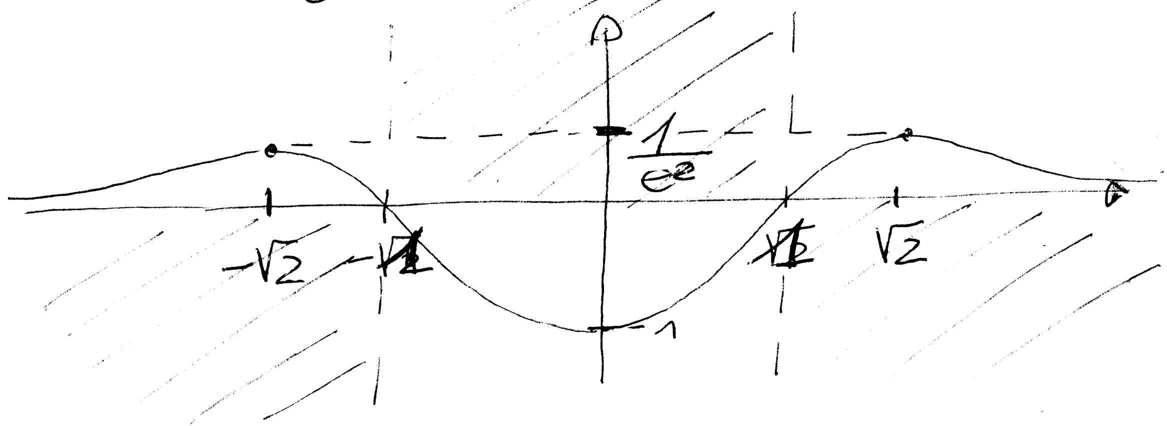
Quindi $f' = 0$ se $2x(2-x^2) = 0$, cioè se $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$

Inoltre

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
segno di x	−		−		+		+
segno di $2-x^2$	−		+		+		−
segno di e^{x^2}	+		+		+		+
segno di f'	+		−		+		−

Allora i punti critici di f sono $x=0$, $x=\sqrt{2}$ e $x=-\sqrt{2}$
la funzione cresce in $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$ e decresce altrove.

3) Devo calcolare il valore di f nei punti critici
$f(-\sqrt{2}) = \frac{2-1}{e^2} = 1/e^2$, $f(0) = -1$, $f(\sqrt{2}) = 1/e^2$



④ chiamiamo co la lunghezza del cateto orizzontale, $cv(t)$ la funzione che esprime la lunghezza del cateto verticale, e $IP(t)$ la lunghezza dell'ipotenusa

- il problema dice che
  - co = 30 costante
  - la derivata di $cv(t)$ è 2
  - $IP(t) = \sqrt{30^2 + (cv(t))^2}$ (*)
- il problema chiede la derivata di $IP(t)$ quando $cv = 10$

Derivando la formula (*) usando la regola di derivazione delle funzioni composte ho

$$\frac{d}{dt} IP(t) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{900 + (cv(t))^2}} \cdot \cancel{2}(cv(t)) \cdot \frac{d}{dt} cv(t)$$

Sostituendo in questa formula il valore 10 per $cv(t)$ e 2 per $\frac{d}{dt} cv(t)$ ottengo

$$\frac{d}{dt} IP(t) = \frac{1}{\sqrt{900+100}} \cdot 10 \cdot 2 = \frac{20}{\sqrt{1000}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

Quindi l'ipotenusa cresce di $2/\sqrt{10}$ centimetri al secondo

⑤ Troviamo i punti critici di $(3+x)^3(3-x)^5$ in $[-3,3]$. La derivata è

$$3(3+x)^2\cdot 1\cdot(3-x)^5+(3+x)^3\cdot 5(3-x)^4\cdot(-1)$$
$$=(3+x)^2(3-x)^4\left[3(3-x)-5(3+x)\right]$$
$$=(3+x)^2(3-x)^4(9-3x-15-5x)$$
$$=(3+x)^2(3-x)^4(-6-8x)$$

che si annulla quando $x=-3$, $x=3$ e $x=-\frac{3}{4}$

Allora i candidati punti di max assoluto sono gli estremi dell'intervallo + i punti critici, cioè

$x=-3$
$x=3$
$x=-3/4$

Calcolo il valore di f in questi punti $f(-3)=0$
$f(3)=0$
$f\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{9}{4}\right)^3\left(\frac{15}{4}\right)^5$

il valore massimo assoluto è quindi $\left(\frac{9}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{15}{4}\right)^3$
e il punto di max assoluto è $x=-3/4$

⑥ Scrivo l'equazione della retta per A e B con la formula dell'equaz della retta per due punti dati e ottengo $y=-\frac{1}{10}x-\frac{6}{10}$. Allora

$$\text{Area}=\int_{-1}^{0}(2^x-1)-\left(-\frac{x}{10}-\frac{6}{10}\right)dx+\int_0^4-\frac{\sqrt{x}}{2}-\left(-\frac{x}{10}-\frac{6}{10}\right)dx$$

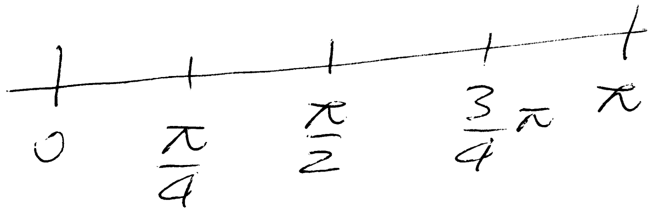
$$=\left[\frac{2^x}{\ln(2)}-x+\frac{x^2}{20}+\frac{6}{10}x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{2}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{20}+\frac{6}{10}x\right]_0^4$$

$$=\left(\frac{1}{\ln(2)}+0\right)-\left(\frac{1}{2\ln(2)}+1+\frac{1}{20}-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{1}{3}4^{\frac{3}{2}}+\frac{16}{20}+\frac{3}{5}\cdot 4\right)-0$$

(7) La formula per il volume dei solidi di rotazione applicata a questo caso da

$$\text{Volume} = \pi \int_0^{\pi} (\text{sen}(x))^2 \, dx$$

Per approssimare tale integrale con la regola di Simpson divido l'intervallo $[0, \pi]$ in quattro parti uguali



La formula di Simpson da

$$\text{Volume} \approx \pi \left(\frac{\Delta x}{3} \cdot \left((\text{sen}(0))^2 + 4\left(\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)^2 + 2\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + 4\left(\text{sen}\frac{3}{4}\pi\right)^2 + (\text{sen}\,\pi)^2 \right) \right)$$

$$\approx \pi \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \left(0 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \cdot 1^2 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{12} \left(2 + 2 + 2 \right) = \frac{\pi^2}{2}$$