Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 24 Gennaio 2018

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Dire se la retta $y = x$ é tangente alla curva $y = \frac{x}{\cos x}$ nel punto $(0,0)$.

soluzione Si

il coeff. angolare è la derivata in $x=0$. $\left(\frac{x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{(\cos x)^2}$

in $x=0$ si ha derivata $=1$. Inoltre la retta passa per $(0,0)$.

1b) (1,5 punti) Una macchina viaggia lungo una autostrada rettilinea. La sua velocita' all'istante t é $3\sqrt[3]{t} + t^3$ (il tempo é misurato in secondi e la velocitá in metri al secondo). Di quanti metri si é spostata la macchina tra l'istante $t = 1$ e l'istante $t = 9$?

soluzione

$$\int_1^9 \left(3\, t^{1/3} + t^3\right) dt = \left[3 \cdot \frac{3}{4} t^{4/3} + \frac{t^4}{4}\right]_1^9 = 1679{,}9$$

1c) (1,5 punti) Dire se esiste una soluzione della equazione $\dfrac{2^x 3 + 1}{5} = 1$ e se esiste scriverla (scriverla in forma decimale, con due decimali).

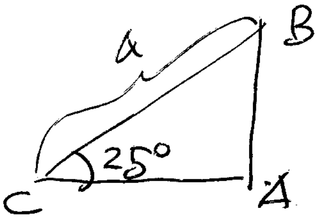
soluzione

$$\frac{2^x \cdot 3 + 1}{5} = 1 \Longrightarrow 2^x \cdot 3 + 1 = 5 \Longrightarrow 2^x = \frac{4}{3}$$

$$\Longrightarrow x = \log_2\left(\tfrac{4}{3}\right) = \frac{\ln\left(\tfrac{4}{3}\right)}{\ln 2} \approx \frac{0{,}287}{0{,}693} \approx 0{,}415$$

1d) (1,5 punti) Il triangolo ABC è rettangolo in A, l'angolo in C misura 25 gradi e l'ipotenusa BC è lunga 4. Calcolare il perimetro del triangolo.

soluzione



$AB = 4 \cdot \operatorname{sen} 25° \approx 1{,}690$

$AC = 4 \cdot \cos 25° \approx 3{,}625$

Perimetro $= 4 + 1{,}690 + 3{,}625 = 9{,}315$

2) (7 punti) Considerate la tabella seguente

X	Y
-1	5
-3	50
10	2000

a) Calcolate la media e la varianza dei dati X;

b) Cercate la funzione esponenziale $Y = a\,p^X$ che meglio approssima i dati: calcolate i coefficienti a e p; calcolate il coefficiente CP corrispondente a questa interpolazione e dite se si puó ritenere che la Y dipenda dalla X in modo esponenziale oppure no.

media(X)= 2	; varianza(X)= 32,67

equazione retta di regressione del problema "trasformato": $z = 0{,}161x + 1{,}577$	
$a =$ $10^q = 37{,}76$	; $p =$ $10^m = 1{,}45$
CP= 0,86	; Y dipende da X in modo esponenziale oppure no? NO

Svolgimento:

Compito 2

	X	2*2^x	Y	Z:=Log y	X^2	Z^2	ZX
	-1,00	1,00	5	0,70	1	0,489	-0,699
	-3,00	0,25	50	1,70	9	2,886	-5,097
	10,00	2048,00	2000	3,30	100	10,897	33,010
media	2,00	683,08		1,90	36,67	4,76	9,07
varianza	32,67			1,15			

regressione lineare associata

m=	media xz-media(x)media(z)		5,272	0,161
	varianza(x)		32,667	
q=	media(z)-m*media(x)		1,577	

regressione esponenziale

a=	10^q		37,74604	
p=	10^m		1,450082	
Rq (calcolato da calc)=		0,7408		
CP=	media(xz)-media(x)media(z)		5,2722	0,8607
	devstand(x)devstand(z)		6,1254	
CP calcolato da calc=				0,8607
R^2=				0,7408

3) (8 punti) Sia $f(x) = \dfrac{3x^2}{2} + 4\ln(3x+8)$.

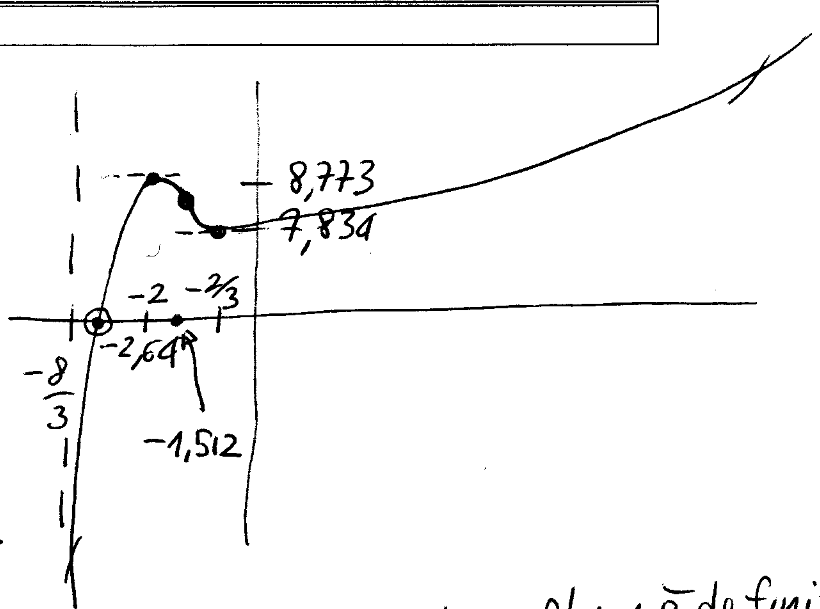
La funzione ha come dominio $(-8/3, +\infty)$. Il grafico interseca l'asse x solo in $x = -2,64$. I limiti sono:

$$\lim_{x\to -8/3^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

a) Scrivete la derivata prima e seconda di f;
b) dite dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) studiate la concavità e disegnate il grafico di f.
(**Non studiate il segno di f.**)

derivata prima di f
intervalli del dominio in cui f cresce
e in cui f decresce
derivata seconda di f
intervalli del dominio in cui f è concava verso l'alto
e in cui è concava verso il basso

Svolgimento e grafico:



$f'(x) = 3x + 4 \cdot \dfrac{3}{3x+8} =$

$= \dfrac{3(3x^2+8x+4)}{3x+8}$

$f' = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ e $x = -2$

segno di f'

	$-8/3$	-2	$-2/3$	
segno num	+	+	−	+
segno denom	−	+	+	+
segno f'	//////	+	−	+
crescenza di f		↗	↘	↗

(ignoro il segno dove f' non è definito)

Calcolo f nei punti critici $f(-2) \approx 8,773$ $f(-\frac{2}{3}) \approx 7,834$

$f'' =$ (utilizzo l'espressione $3x + \dfrac{12}{3x+8}$ per calcolare f'') $\left(3x + \dfrac{12}{3x+8}\right)' =$

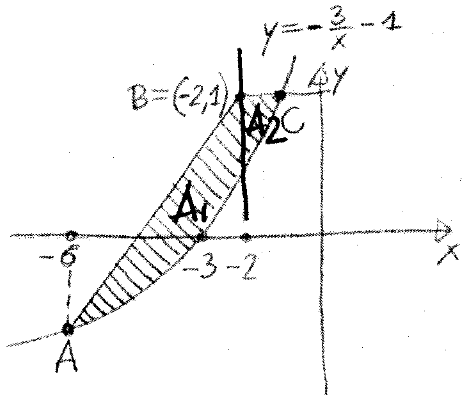
$= 3 + \dfrac{0 - 12\cdot 3}{(3x+8)^2} = \dfrac{3\left[(3x+8)^2 - 12\right]}{(3x+8)^2} = \dfrac{3(9x^2+48x+52)}{(3x+8)^2}$

segno di f'' = segno di $9x^2+48x+52$ + | − | + ($-3,521$, $-1,512$)

Concavità di f ($-\frac{8}{3}$, $-1,512$)

$x = -1,512$ è un punto di flesso

4) (6 punti) Calcolate l'area dell'insieme tratteggiato disegnato nella figura. Nel disegno è indicata la coordinata x di A e ambedue le coordinate di B. Inoltre C ha la stessa coordinata y di B.



equazione della retta per A e B
coordinata x di C
integrale/i per calcolare l'area
valore dell'area

Svolgimento:

Coordinata y di A $= f(-6) = -\frac{3}{-6} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ $\quad A = \left(-6, -\frac{1}{2}\right)$

Coordinata x di C $\begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{3}{x} - 1 \end{cases}$ $\quad 1 = -\frac{3}{x} - 1 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Eq. retta per A e B $\quad y = \frac{3}{8}x + \frac{7}{4}$

$$\text{area } A = \text{area } A_1 + \text{area } A_2 = \int_{-6}^{-2} \frac{3}{8}x + \frac{7}{4} - \left(-\frac{3}{x} - 1\right) dx + \int_{-2}^{-3/2} 1 - \left(-\frac{3}{x} - 1\right) dx$$

$$= \int_{-6}^{-2} \left(\frac{3}{8}x + \frac{3}{x} + \frac{11}{4}\right) dx + \int_{-2}^{-3/2} \left(\frac{3}{x} + 2\right) dx = \left[\frac{3}{16}x^2 + 3\ln|x| + \frac{11}{4}x\right]_{-6}^{-2}$$

$$+ \left[3\ln|x| + 2x\right]_{-2}^{-3/2} = \cancel{3{,}3737 - (-11{,}1195)} + \cancel{\ldots = 1{,}7836}$$

$$\cancel{= (-1{,}9206)} = \cancel{7{,}7458 + 0{,}137} = \frac{3}{16}(4 - 36) + 3(\ln 2 - \ln 6)$$

$$+ \frac{11}{4}(-2 + 6) + 3\left(\ln\frac{3}{2} - \ln 2\right) + 2\left(-\frac{3}{2} + 2\right) = 1{,}7042 + 0{,}137$$

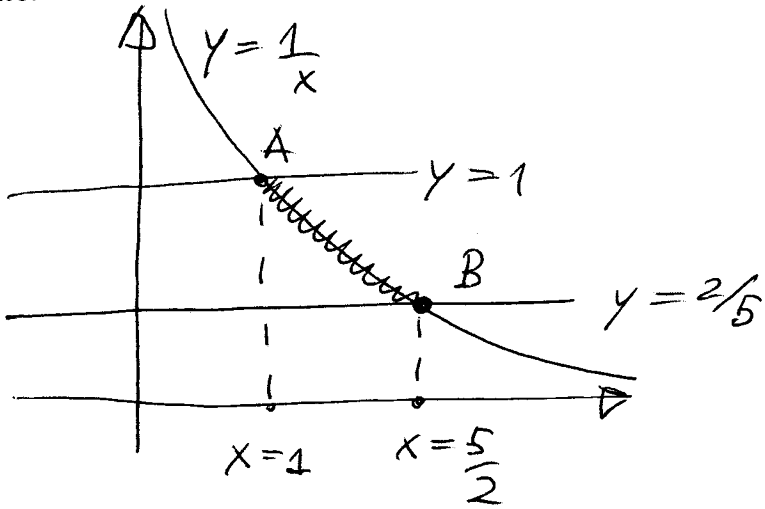
5) (6 punti) Considerate la parte del grafico $y = \frac{1}{x}$ che é compresa tra le due rette orizzontali $y = 2/5$ e $y = 1$.

a) Scrivete la sua lunghezza tramite un opportuno integrale;

b) Calcolate un valore approssimato di tale integrale tramite il metodo del trapezio con $n = 5$.

valore approssimato

Svolgimento:



$A: \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow x = 1$ $\qquad$ $B: \begin{cases} y = \cancel{2}/5 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow x = 5/2$

Lunghezza arco A B $= \int_1^{5/2} \sqrt{1 + \left(\text{derivata di } \frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \int_1^{5/2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}$

$\Delta x = \left(\frac{5}{2} - 1\right) / 5 = 0{,}3$

1 $\quad$ 1,3 $\quad$ 1,6 $\quad$ 1,9 $\quad$ 2,2 $\quad$ 5/2

x	$\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}$
1	1,414
1,3	1,1619
1,6	1,074
1,9	1,038
2,2	1,021
2,5	1,013

$$\int_1^{5/2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx \approx \frac{0{,}3}{2} \left(1{,}414 + 2 \cdot 1{,}1619 + 2 \cdot 1{,}074 + 2 \cdot 1{,}038 + 2 \cdot 1{,}021 + 1{,}013\right) \approx 1{,}652$$

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 24 Gennaio 2018

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Dire se la retta $y = 2x$ é tangente alla curva $y = xe^x$ nel punto $(0, 0)$.

soluzione NO

$(xe^x)' = e^x + xe^x$ in $x=0$ la derivata è $e^0 + 0e^0$ è 1. Allora m retta tangente è 1

1b) (1,5 punti) Una macchina viaggia lungo una autostrada rettilinea. La sua velocita' all'istante t é $3\sqrt{t} + t^2$ (il tempo é misurato in secondi e la velocitá in metri al secondo). Di quanti metri si é spostata la macchina tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 10$?

soluzione

$$\int_0^{10} 3\sqrt{t} + t^2 \, dt = \left[3 \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} + \frac{t^3}{3}\right]_0^{10} = 2 \cdot 10^{3/2} + \frac{1000}{3} \approx$$

$\approx 342,616$

1c) (1,5 punti) Dire se esiste una soluzione della equazione $\dfrac{2^x 3 + 1}{5} = -1$ e se esiste scriverla (scriverla in forma decimale, con due decimali).

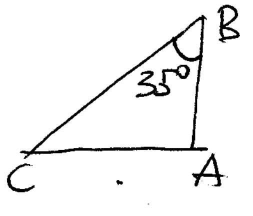
soluzione

$2^x \cdot 3 + 1 = -5$ $\quad 2^x \cdot 3 = -6 \Rightarrow 2^x = -2$

NON Esiste perchè 2^x è sempre > 0 qualsiasi sia x

1d) (1,5 punti) Il triangolo ABC è rettangolo in A, l'angolo in B misura 35 gradi e l'ipotenusa BC è lunga 2. Calcolare il perimetro del triangolo.

soluzione



$CA = BC \operatorname{sen} 35° \approx 1,14$

$AB = BC \cos 35° \approx 1,63$

Perimetro $\approx 2 + 1,14 + 1,63 \approx 4,77$

2) (7 punti) Considerate la tabella seguente

X	Y
-1	1
-5	0,1
3	500

a) Calcolate la media e la varianza dei dati X;

b) Cercate la funzione esponenziale $Y = a\,p^X$ che meglio approssima i dati: calcolate i coefficienti a e p; calcolate il coefficiente CP corrispondente a questa interpolazione e dite se si puó ritenere che la Y dipenda dalla X in modo esponenziale oppure no.

media(X)= -1	; varianza(X)= $10,67$

equazione retta di regressione del problema "trasformato": $Z = 0,462x + 1,029$	
$a =$ 10,683	; $p =$ 2,899
CP= 0,96	; Y dipende da X in modo esponenziale oppure no? SI

Svolgimento:

Compito 1

dati nascosti per costruire esercizio

	X	3*3^x	Y	Z:=Log y	X^2	Z^2	ZX
	-1,00	1,00	1	0,00	1	0,000	0,000
	-5,00	0,01	0,1	-1,00	25	1,000	5,000
	3,00	81,00	500	2,70	9	7,284	8,097
media	-1,00	27,34		0,57	11,67	2,76	4,37
varianza	10,67			2,44			

regressione lineare associata

m=	media xz-media(x)media(z)		4,932	0,462
	varianza(x)		10,667	
q=	media(z)-m*media(x)		1,029	

regressione esponenziale

a=	10^q		10,68303	
p=	10^m		2,899821	
Rq (calcolato da calc)=		0,9343		
CP=	media(xz)-media(x)media(z)		4,9320	0,9666
	devstand(x)devstand(z)		5,1024	
CP calcolato da calc=				0,9666
R^2=				0,9343

3) (8 punti) Sia $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{3}\ln(3x+1)$.

La funzione ha come dominio $(-\frac{1}{3}, +\infty)$. Il grafico interseca l'asse x solo in $x = 0$ e $x = 1,51$. I limiti sono:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

a) Scrivete la derivata prima e seconda di f;
b) dite dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) studiate la concavità e disegnate il grafico di f.

(Non studiate il segno di f.)

derivata prima di f
intervalli del dominio in cui f cresce
e in cui f decresce
derivata seconda di f
intervalli del dominio in cui f è concava verso l'alto
e in cui è concava verso il basso

Svolgimento e grafico:

$$f' = x - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3x+1} \cdot 3 = x - \frac{2}{3x+1} = \frac{3x^2+x-2}{3x+1}$$

$f' = 0 \quad x = \frac{2}{3} \quad x = -1$

segno di f': il denominatore è sempre >0 nel dominio di f

il numeratore ha il segno $\quad + \quad -1 \quad - \quad \frac{2}{3} \quad +$

Allora nel dominio di f il segno di f' è $\quad$ ////// $-\frac{1}{3}$ $\quad - \quad \frac{2}{3} \quad +$

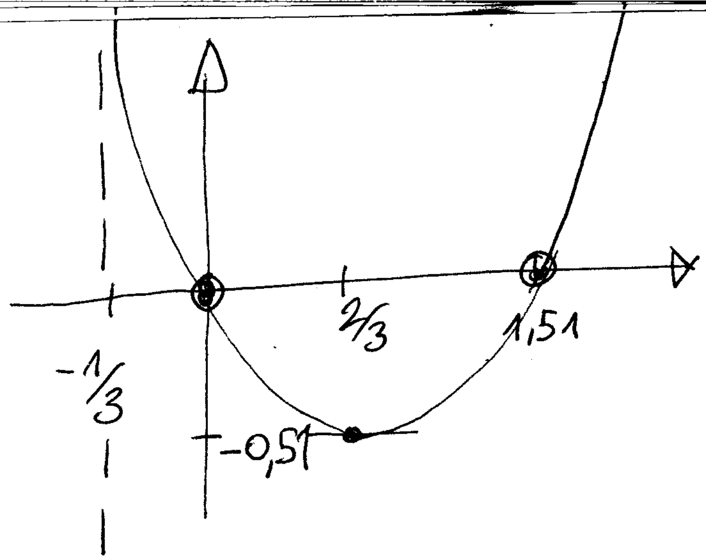
crescenza di f $\quad \searrow \quad \nearrow$

Calcolo $f\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0,51$

Calcolo f''. E' conveniente e più semplice derivare $x - \frac{2}{3x+1}$.

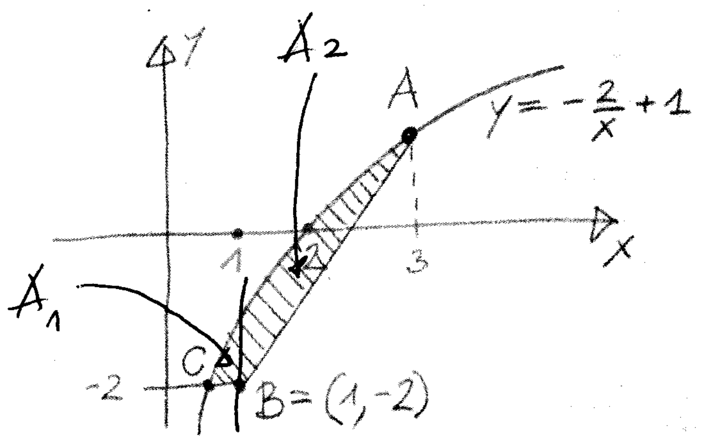
$$f'' = \left(x - \frac{2}{3x+1}\right)' = 1 + \frac{2 \cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{(3x+1)^2 + 6}{(3x+1)^2}$$

il segno di f'' è sempre $+$, per ogni x. Allora la funzione è concava verso l'alto in tutto il dominio di f. Vedi l'ultima pagina per il grafico



-1/3
2/3
1,51
-0,51

4) (6 punti) Calcolate l'area dell'insieme tratteggiato disegnato nella figura. Nel disegno è indicata la coordinata x di A e ambedue le coordinate di B. Inoltre C ha la stessa coordinata y di B.



equazione della retta per A e B	$y =$
coordinata x di C	
integrale/i per calcolare l'area	
valore dell'area	

Svolgimento:

$y_A = f(3) = -\frac{2}{3}+1 = 1/3$; Eq retta per A e B : $y = \frac{7}{6}x - \frac{19}{6}$

$C : \begin{cases} y = -2 \\ y = -\frac{2}{x}+1 \end{cases} \Rightarrow -2 = -\frac{2}{x}+1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow C = \left(\frac{2}{3}, -2\right)$

$$\text{Area} = \text{area } A_1 + \text{area } A_2 = \int_{2/3}^{1} \left(-\frac{2}{x}+1\right) - (-2)\,dx + \int_{1}^{3} \left(-\frac{2}{x}+1\right) - \left(\frac{7}{6}x - \frac{19}{6}\right) dx$$

$$= \int_{2/3}^{1} \left(3 - \frac{2}{x}\right) dx + \int_{1}^{3} \left(-\frac{2}{x} - \frac{7}{6}x + \frac{25}{6}\right) dx = \Big[3x - 2\ln x\Big]_{2/3}^{1} +$$

$$\left[-2\ln x - \frac{7}{12}x^2 + \frac{25}{6}x\right]_1^3 = (3-0) - \left(3\cdot\frac{2}{3} - 2\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$+ -2(\ln 3 - \ln 1) - \frac{7}{12}\left(3^2 - 1^2\right) + \frac{25}{6}(3-1) \approx 1{,}6585$$

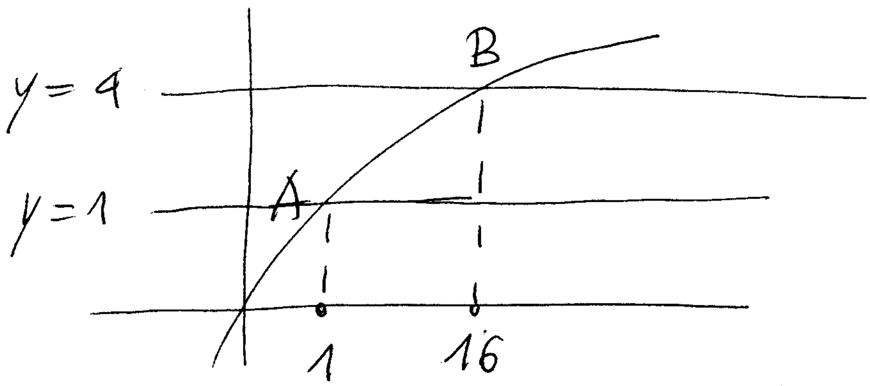
5) (6 punti) Considerate la parte del grafico $y = \sqrt{x}$ che é compresa tra le due rette orizzontali $y = 1$ e $y = 4$.

a) Scrivete la sua lunghezza tramite un opportuno integrale;

b) Calcolate un valore approssimato di tale integrale tramite il metodo di Simpson con $n = 6$.

valore approssimato

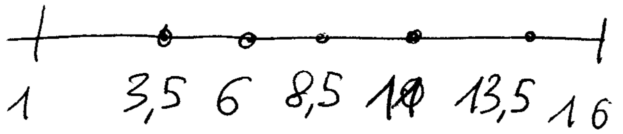
Svolgimento:



Per trovare le x dei punti A e B imposto un sistema.

Ad esempio B: $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$

lunghezza arco AB $= \int_1^{16} \sqrt{1 + (\text{derivata di } \sqrt{x})^2}\, dx = \int_1^{16} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$



$\Delta x = \frac{16-1}{6} = \frac{5}{2} = 2,5$

x	$\sqrt{1 + 1/4x}$
1	1,118
3,5	1,035
6	1,020
8,5	1,014
11	1,011
13,5	1,009
16	1,007

$\int_1^{16} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx \approx \frac{2,5}{3} \cdot \left(1,118 + 4 \cdot 1,035 + 2 \cdot 1,020 + 4 \cdot 1,014 + 2 \cdot 1,011 + 4 \cdot 1,009 + 1,007\right) \approx 15,354$

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 24 Gennaio 2018

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Dire se la retta $y = 2(x-1)$ é tangente alla curva $y = 2\,x\,ln(x)$ nel punto $(1, 0)$.

soluzione Sì

La retta passa per $(1,0)$. Inoltre il suo coeff. angolare è quello giusto.

Infatti $(2x\ln x)' = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$ Quando $x = 1$ la derivata è $2 \cdot 0 + 2$

1b) (1,5 punti) Una macchina viaggia lungo una autostrada rettilinea. La sua velocita' all'istante t é $3\sqrt[4]{t} + t^4$ (il tempo é misurato in secondi e la velocitá in metri al secondo). Di quanti metri si é spostata la macchina tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 8$?

soluzione

$$\int_0^8 \left(3t^{\frac{4}{2}} + t^4\right)dt = \int_0^8 \left(3t^2 + t^4\right)dt = \left[t^3 + \frac{t^5}{5}\right]_0^8 =$$

$$= 8^3 + \frac{8^5}{5} = 7065,6$$

1c) (1,5 punti) Dire se esiste una soluzione della equazione $\dfrac{5^x\,3 - 1}{5} = 1$ e se esiste scriverla (scriverla in forma decimale, con due decimali).

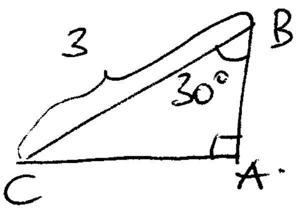
soluzione

$$\frac{5^x \cdot 3 - 1}{5} = 1 \qquad 5^x 3 - 1 = 5 \qquad 5^x \cdot 3 = 6 \qquad 5^x = \frac{6}{3} = 2$$

$$x = \log_5\left(\frac{6}{3}\right) = \frac{\ln\left(\frac{6}{3}\right)}{\ln 5} \approx 0,431$$

1d) (1,5 punti) Il triangolo ABC è rettangolo in A, l'angolo in B misura 30 gradi e l'ipotenusa BC è lunga 3. Calcolare il perimetro del triangolo.

soluzione



$BA = 3 \cdot \cos 30° \approx 2,598$

$CA = 3 \cdot \text{sen}\, 30° = 1,5$

Perimetro $= 3 + 2,598 + 1,5 = 7,098$

2) (7 punti) Considerate la tabella seguente

X	Y
-2	1,5
-4	2,5
0	1,1

a) Calcolate la media e la varianza dei dati X;

b) Cercate la funzione esponenziale $Y = a\,p^X$ che meglio approssima i dati: calcolate i coefficienti a e p; calcolate il coefficiente CP corrispondente a questa interpolazione e dite se si puó ritenere che la Y dipenda dalla X in modo esponenziale oppure no.

media(X)= 2	; varianza(X)= 2,67
equazione ~~retta di regressione del problema~~ "trasformato":	$z = -0{,}089X + 0{,}027$
$a =$ 1,063	; $p =$ 0,814
$CP =$ $-0{,}9902$	; ~~Y dipende da X in modo~~ esponenziale oppure no? SI

Svolgimento:

Compito 3

	X	(0,8)^x	Y	Z:=Log y	X^2	Z^2	ZX
	-2,00	1,56	1,5	0,1761	4	0,031	-0,352
	-4,00	2,44	2,5	0,3979	16	0,158	-1,592
	0,00	1,00	1,1	0,0414	0	0,002	0,000
media	-2,00	1,67		0,21	6,67	0,06	-0,65
varianza	2,67			0,02			

regressione lineare associata

m=	media xz-media(x)media(z)		-0,238	-0,089
	varianza(x)		2,667	
q=	media(z)-m*media(x)		0,027	

regressione esponenziale

a=	10^q		1,063819	
p=	10^m		0,814448	
Rq (calcolato da calc)=		0,9805		
CP=	media(xz)-media(x)media(z)		-0,2377	-0,9902
	devstand(x)devstand(z)		0,2401	
CP calcolato da calc=				-0,9902
R^2=				0,9805

3) (8 punti) Sia $f(x) = -\frac{x^2}{2} - 2\ln(x+3)$.

La funzione ha come dominio $(-3, +\infty)$. Il grafico interseca l'asse x solo in $x = -2,87$. I limiti sono:

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

a) Scrivete la derivata prima e seconda di f;
b) dite dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) studiate la concavità e disegnate il grafico di f.

(Non studiate il segno di f.)

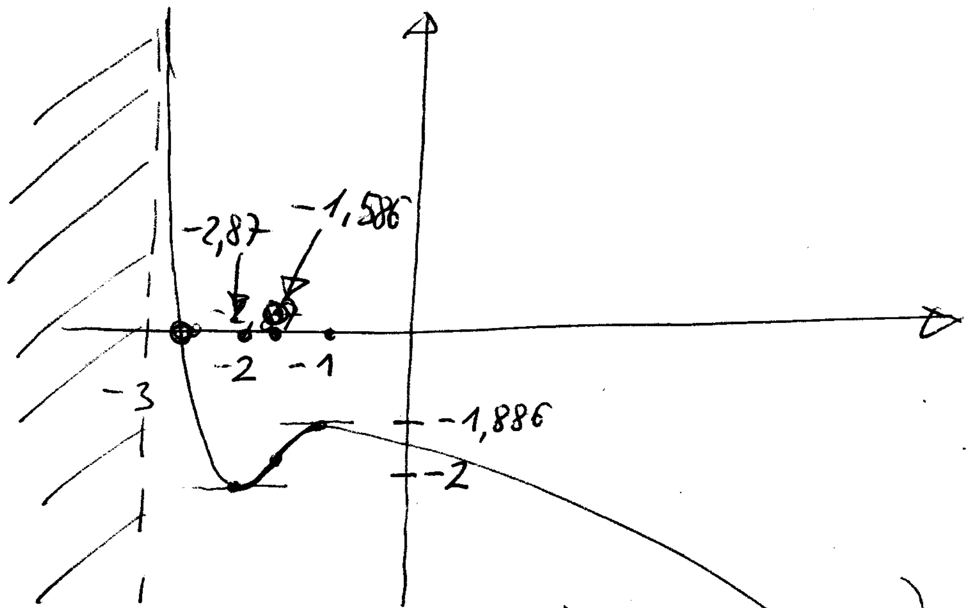
derivata prima di f
intervalli del dominio in cui f cresce
e in cui f decresce
derivata seconda di f
intervalli del dominio in cui f è concava verso l'alto
e in cui è concava verso il basso

Svolgimento e grafico:

$f' = -x - \frac{2}{x+3} =$

$= \frac{-x^2-3x-2}{x+3}$

segno di $-x^2-3x-2$ -2 -1: $-$ $+$ $-$
" " $x+3$: $+$ $+$ $+$
" di f': $-$ $+$ $-$
crescenza di f: $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$



Calcolo f nei punti critici $\quad f(-2) = -2 \quad f(-1) = -\frac{1}{2} - 2\ln 2 \approx -1,886$

Calcolo $f'' = \left(-x - \frac{2}{x+3}\right)' = -1 - \frac{0 - 2\cdot 1}{(x+3)^2} = -1 + \frac{2}{(x+3)^2} = \frac{-x^2-6x-7}{(x+3)^2}$

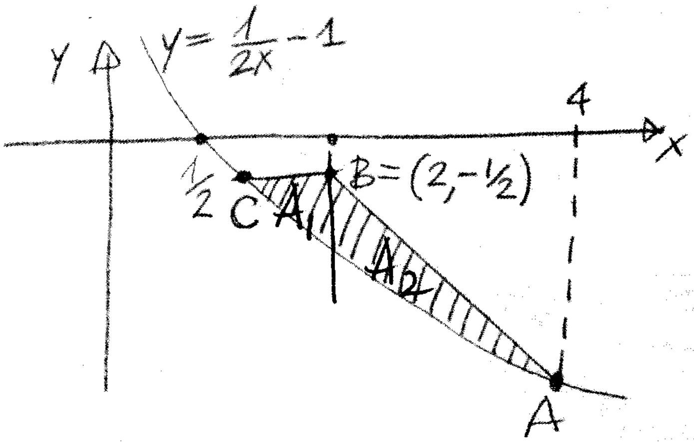
segno di f'' = segno di $-x^2-6x-7$ $-4,414$ -3 $-1,586$: $+$ $-$

$-1,586 \approx -3+\sqrt{2}$
$-4,414 \approx -3-\sqrt{2}$

concavità $\cup$ $\cap$

$x = -1,586$ è un punto di flesso

4) (6 punti) Calcolate l'area dell'insieme tratteggiato disegnato nella figura. Nel disegno è indicata la coordinata x di A e ambedue le coordinate di B. Inoltre C ha la stessa coordinata y di B.



equazione della retta per A e B
coordinata x di C
integrale/i per calcolare l'area
valore dell'area

Svolgimento:

coordinata y di A $\quad f(4)=\frac{1}{2\cdot 4}-1=-\frac{7}{8} \qquad A=(4,-\frac{7}{8})$

coordinata x di C $\quad \begin{cases} y=\frac{1}{2x}-1 \\ y=-\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{1}{2x}-1 \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2x} \Rightarrow x=1$

retta per A e B $\quad y=-\frac{3}{16}x-\frac{1}{8}$

$$\text{area}=\text{area}A_1+\text{area}A_2=\int_1^2 -\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2x}-1\right)dx+\int_2^4 -\frac{3}{16}x-\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2x}-1\right)dx$$

$$=\int_1^2 -\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\,dx+\int_2^4 -\frac{3}{16}x-\frac{1}{2x}+\frac{7}{8}\,dx=\left[-\frac{1}{2}\ln x+\frac{x}{2}\right]_1^2+$$

$$+\left[-\frac{3}{32}x^2-\frac{1}{2}\ln x+\frac{7}{8}x\right]_2^4=-\frac{1}{2}(\ln 2-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\ln 1}})+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+$$

$$-\frac{3}{32}(16-4)-\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 2)+\frac{7}{8}(4-2)$$

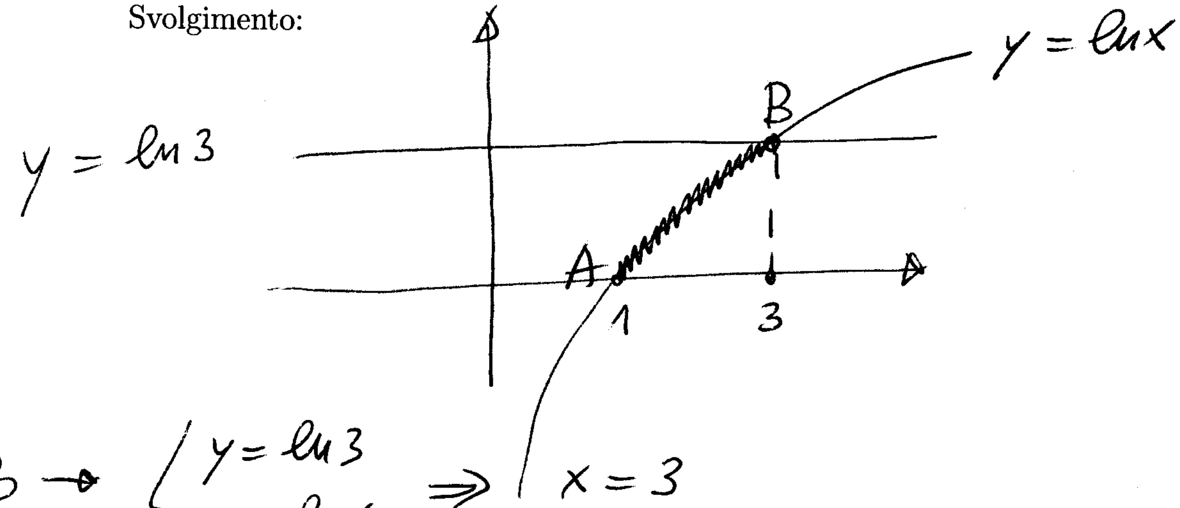
5) (6 punti) Considerate la parte del grafico $y = \ln x$ che é compresa tra le due rette orizzontali $y = 0$ e $y = \ln 3$.

a) Scrivete la sua lunghezza tramite un opportuno integrale;

b) Calcolate un valore approssimato di tale integrale tramite il metodo dei punti medi con $n = 5$.

valore approssimato

Svolgimento:



$$B \to \begin{cases} y = \ln 3 \\ y = \ln x \end{cases} \Rightarrow x = 3$$

$$\text{lunghezza} = \int_1^3 \sqrt{1 + (\text{derivata di } \ln x)^2}\, dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx$$

1,2 1,6 2 2,4 2,8

1 1,4 1,8 2,2 2,6 3

$$\Delta x = \frac{3-1}{5} = 0{,}4$$

x	$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
1,2	1,302
1,6	1,179
2	1,118
2,4	1,083
2,8	1,062

$$\text{lunghezza} = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx \approx 0{,}4\,(1{,}302 + 1{,}179 + 1{,}118 + 1{,}083 + 1{,}062) = 2{,}230$$