Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 22 Luglio 2014

Domande brevi

1a) Scrivere la soluzione dell'equazione $5\log_2(6-x) = 13$.

soluzione $x =$

$5\log_2(6-\cancel{x}) = 13 \iff \log_2(6-x) = 13/5$

$\iff 6-x = 2^{\frac{13}{5}} \iff 6-2^{\frac{13}{5}} = x$

1b) Calcolare la derivata prima di $f(x) = x\ln(x^2+6)$ in $x = 1$

soluzione

$D(x\ln(x^2+6)) = D(x)\cdot\ln(x^2+6) + x\cdot D(\ln(x^2+6))$

$= 1\cdot\ln(x^2+6) + x\cdot\left(\frac{1}{x^2+6}\cdot 2x\right)$

derivata in $x=1$ è $\ln(7) + \frac{2}{7}$

1c) Determinare l'intervallo in cui la funzione xe^x é concava verso l'alto.

soluzione

Calcolo la derivata seconda di $x\cdot e^x$

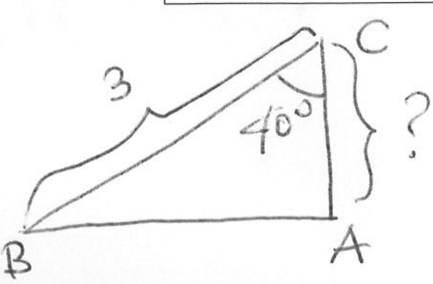
$D(x\cdot e^x) = 1\cdot e^x + x e^x = (1+x)e^x$

$D^2(x\cdot e^x) = D((1+x)e^x) = 1\cdot e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$

La funzione è concava dove $D^2(xe^x) \geq 0$, cioè se $x \in [-2, +\infty)$

1d) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\widehat{C}B$ è $40°$ e la lunghezza dell'ipotenusa BC è 3. Calcolare la lunghezza del cateto AC.

lunghezza (scriverla come numero decimale approssimato tramite la calcolatrice)



Poiché $(\cos 40°)\cdot\overline{BC} = \overline{AC}$

ho che $\overline{AC} = 3\cdot\cos(40°)$

$\approx 2{,}298$

2) Trovare il valore massimo e minimo assoluto di

$$f(x) = x^3(x-1)^2$$

quando x varia nell'intervallo $[-0.2, 0.8]$. Studiare anche la crescenza e decrescenza di f in tutto $\mathbb{R}$.

derivata prima di f
intervalli di $\mathbb{R}$ in cui f cresce
e in cui f decresce
punti candidati ad essere di max/min assoluto in $[-0.2, 0.8]$
x di max e valore max ; x di min e valore min

Svolgimento:

Calcolo $f' = D(x^3)(x-1)^2 + x^3 D((x-1)^2) =$

$= 3x^2(x-1)^2 + x^3 2(x-1)\cdot 1$

$= x^2(x-1)[3(x-1) + x\cdot 2\cdot 1]$

$= x^2(x-1)(5x-3) = x^2(5x^2-8x+3) = 5x^4-8x^3+3x^2$

Allora i punti critici di f sono $x=0$, $x=1$, $x=\frac{3}{5}$

Il segno di f' è

		0		$\frac{3}{5}$		1	
segno di x^2	+		+		+		+
segno di $x-1$	−		−		−		+
segno di $(5x-3)$	−		−		+		+
segno di f'	+		+		−		+
	↗		↗		↘		↗

Quindi f cresce ovunque eccetto in $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$

In particolare in $[-0,2, 0,8]$

$-0,2 \quad 0 \nearrow \frac{3}{5} \searrow 0,8$

Allora i punti candidati sono

$x=-0,2$, $x=3/5$, $x=0,8$, $x=0$

$f(-0,2) \approx -0,012$ ← min assoluto

$f(3/5) \approx 0,035$ ← max assoluto

$f(0,8) \approx 0,020$

$f(0) = 0$

3) Sia $f(x) = \dfrac{xe^x + e^x}{x-1}$

La funzione ha come dominio $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. I limiti sono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

a) Studiare il segno di f
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) disegnare il grafico di f.

intervalli del dominio in cui f è positiva	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
derivata prima di f	
intervalli del dominio in cui f cresce	
e in cui f decresce	
punti in cui si annulla f' e valore di f in essi	

- Svolgimento e grafico:

segno di f

		-1		1	
segno di $(x+1)$	$-$		$+$		$+$
segno di e^x	$+$		$+$		$+$
segno di $x-1$	$-$		$-$		$+$
segno di f	$+$		$-$		$+$

$$f' = \frac{(xe^x+e^x)'(x-1) - (xe^x+e^x)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(2+x)e^x(x-1)-(x+1)e^x \cdot 1}{(x-1)^2}$$

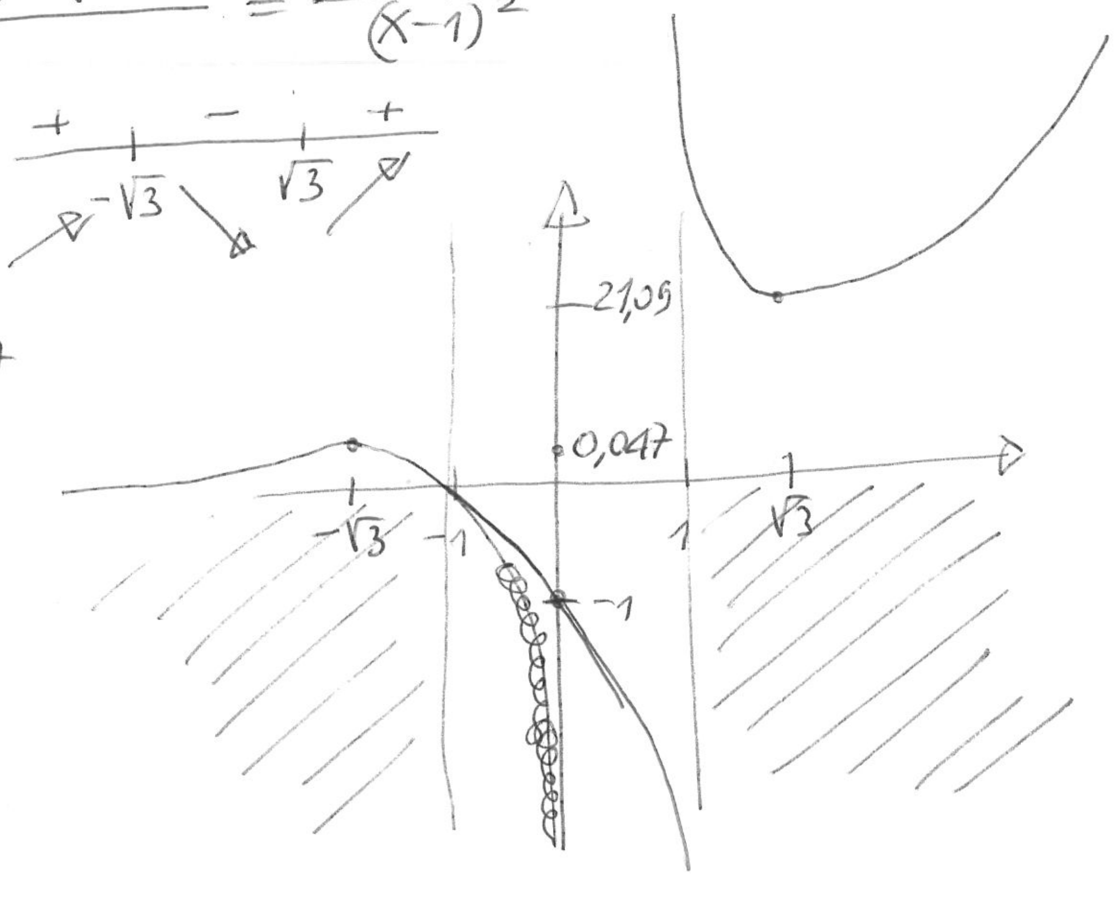
$$= \frac{e^x\left((2+x)(x-1)-(x+1)\right)}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x^2-3)}{(x-1)^2}$$

segno di f': $+$ ($-\sqrt{3}$) $-$ ($\sqrt{3}$) $+$

crescenza di f: $\nearrow$ $-\sqrt{3}$ $\searrow$ $\sqrt{3}$ $\nearrow$

$f(-\sqrt{3}) \approx 0{,}047$

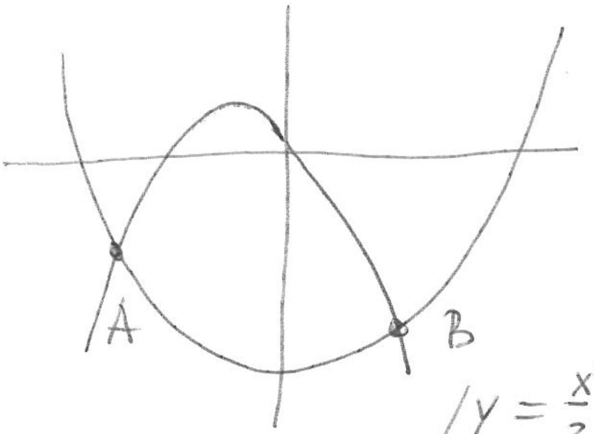
$f(\sqrt{3}) = 21{,}09$



4) Si calcoli l'area compresa tra le due parabole $y = \frac{x^2}{2} - 6$ e $y = -\frac{x^2}{2} - x$ (vedi figura alla lavagna).

coordinate necessarie per impostare l'integrale:
scrivere l'area come un integrale:
valore numerico dell'area

Svolgimento (e calcolo dell'integrale):



$$\text{Area} = \int_{x_A}^{x_B} \text{parabola sopra} - \text{par. sotto}\, dx$$

Calcolo x_A e x_B $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - 6 \\ y = -\frac{x^2}{2} - x \end{cases} \longrightarrow \frac{x^2}{2} - 6 = -\frac{x^2}{2} - x \longrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\rightarrow x = -3$ e $x = 2$. Allora

$$\text{Area} = \int_{-3}^{2} \left(-\frac{x^2}{2} - x\right) - \left(\frac{x^2}{2} - 6\right) dx = \int_{-3}^{2} -x^2 - x + 6\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{2} = \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 12\right) - \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 18\right) =$$

5) Calcolare $\displaystyle\int_{0.4}^{2} x\left(1+3\sqrt{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx$ sia utilizzando il metodo delle primitive che utilizzando il metodo dei punti medi con $n=4$. OK

Calcolo tramite primitive

primitive necessarie
valore dell'integrale

Calcolo tramite metodo del ~~trapezio~~ punti medi

x necessarie per il calcolo
valore approssimato dell'integrale
formula dei punti medi applicata a questo caso particolare

Svolgimento:

Primitive svolgo i prodotti $x\left(1+3\sqrt{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$

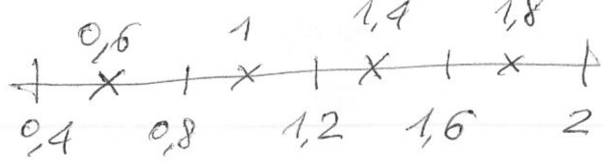
$= \left(1+3\sqrt{x}\right)\left(x+1\right) = x+1+3x^{3/2}+3\sqrt{x}$

perché questo mi permette di calcolare le primitive. Allora

$$\int_{0,4}^{2} x\left(1+3\sqrt{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \int_{0,4}^{2} x+1+3x^{3/2}+3x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2}+x+\frac{6}{5}x^{5/2}+2x^{3/2}\right]_{0,4}^{2} \approx 16{,}4451 - 1{,}1074 = 15{,}3377$$

Punti medi



$\Delta x = 0{,}4$

$$\int \approx 0{,}4\left(f(0{,}6)+f(1)+f(1{,}4)+f(1{,}8)\right)$$

$$= 0{,}4\left(0{,}6\left(1+3\sqrt{0{,}6}\right)\left(1+\frac{1}{0{,}6}\right)+1\left(1+3\sqrt{1}\right)\left(1+\frac{1}{1}\right)+ + 1{,}4\left(1+3\sqrt{1{,}4}\right)\left(1+\frac{1}{1{,}4}\right)+1{,}8\left(1+3\sqrt{1{,}8}\right)\left(1+\frac{1}{1{,}8}\right)\right)$$

$$\approx 0{,}4\left(5{,}1381+8+10{,}9192+14{,}0698\right)$$

$$= 15{,}2584$$