Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 23 Gennaio 2017

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Risolvere l'equazione $2\log_2(x-6) = 6$

soluzione $x = 14$

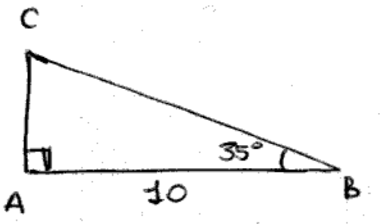
CE: $x - 6 > 0 \quad x > 6$

$\log_2(x-6) = 3$

$x - 6 = 2^3 \Rightarrow x - 6 = 8 \Rightarrow x = 14$ ACC.

1b) (1,5 punti) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\hat{B}C$ è 35° e la lunghezza del cateto AB è 10. Calcolare la lunghezza dell'ipotenusa CB.

soluzione $CB = 12{,}2$

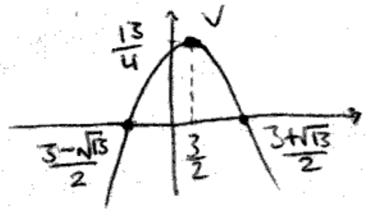


$CB \cdot \cos(A\hat{B}C) = AB$

$\Rightarrow CB = \dfrac{AB}{\cos(A\hat{B}C)} = \dfrac{10}{\cos 35°} = \dfrac{10}{0{,}82} = 12{,}2$

1c) (1,5 punti) Disegnare uno schizzo del grafico della parabola $y = -x^2 + 3x + 1$, indicando in particolare le coordinate del vertice e le coordinate x delle intersezioni con l'asse x.

soluzione $V\left(\frac{3}{2}, 13/4\right)$, $A\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, 0\right)$ $\approx 3{,}30$, $B\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$ $\approx -0{,}30$



$V = \left(\frac{-3}{-2}, -\frac{9+4}{-4}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right)$

INTERSEZIONI ASSE x

$-x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$

$\Delta = 13 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ $<$ $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ $A\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, 0\right)$, $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ $B\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, 0\right)$

1d) (1,5 punti) Scrivere una primitiva di $(x+1)(\sqrt{x}+2) + e^2$

soluzione $2/5\, x^2\sqrt{x} + x^2 + 2/3\, x\sqrt{x} + (2+e^2)x + C$

$\int [(x+1)(\sqrt{x}+2) + e^2]\,dx = \int (x\sqrt{x} + 2x + \sqrt{x} + 2 + e^2)\,dx$

$= \int (x^{3/2} + 2x + x^{1/2} + 2 + e^2)\,dx$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2} + (2+e^2)x + C$

2) (6 punti) Considerate la tabella seguente

X	Y
-1	1
2	40
5	600

a) Calcolate la media e la varianza dei dati X;

b) Cercate la funzione esponenziale $Y = a\,p^X$ che meglio approssima i dati: calcolate i coefficienti a e p; calcolate il coefficiente CP corrispondente a questa interpolazione e dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo esponenziale oppure no;

media(X)= 2	; varianza(X)= 6

equazione retta di regressione del problema "trasformato": $Z = 0,463X + 0,534$	
$a =$ 3,4195	; $p =$ 2,904
$CP =$ 0,9961	; Y dipende da X in modo esponenziale oppure no? SI

Svolgimento:

$$\text{media}(X) = \frac{-1+2+5}{3} = 2 \qquad \text{varianza}(X) = \frac{(-1-2)^2+(2-2)^2+(5-2)^2}{3} = 6$$

Compito 1

	X	Y	Z:=Log y	X^2	Z^2	ZX
	-1,00	1	0,00	1	0,000	0,000
	2,00	40	1,60	4	2,567	3,204
	5,00	600	2,78	25	7,718	13,891
media	2,00		1,46	10,00	3,43	5,70
varianza	6,00		1,30			

regressione lineare associata

m=	media xz-media(x)media(z)	2,778	0,463
	varianza(x)	6,000	
q=	media(z)-m*media(x)	0,534	

regressione esponenziale

a=	10^q	3,419952
p=	10^m	2,904191

Rq (calcolato da calc)= 0,9922

CP=	media(xz)-media(x)media(z)	2,7782	0,9961
	devstand(x)devstand(z)	2,7890	
CP calcolato da calc=			0,9961
R^2=			0,9922

3) (7 punti) Sia $f(x) = \dfrac{x}{(3x+1)e^{2x}}$.

Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{1}{3}\}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\frac{1}{3}^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\frac{1}{3}^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva $(-\infty,-1/3)\cup(0,+\infty)$	intervalli in cui è negativa $\left(-\frac{1}{3},0\right)$
e x in cui f è zero $x=0$	
derivata prima di f $(-6x^2-2x+1)/(e^{2x}\cdot(3x+1)^2)$	
intervalli in cui f cresce $(-0{,}608;0{,}274)$	e in cui decresce altrove
x in cui si annulla f' e valore di f in essi $f(-0{,}608)\approx 2{,}489$ $f(0{,}274)\approx 0{,}09$	

Svolgimento e grafico:

Segno di f

		$-1/3$	0	
segno di x	$- \; -$	$-$	$+ \; + \; +$	
segno di $3x+1$	$- \; -$	$+ \; +$	$+ \; + \; +$	
segno di e^{2x}	$+ \; + \; +$	$+ \; +$	$+ \; + \; +$	
segno di f	$+$	$-$	$+$	

$f=0 \Rightarrow x=0$

Calcolo di $f' = \dfrac{(x)'(3x+1)e^{2x} - x\left((3x+1)e^{2x}\right)'}{(3x+1)^2(e^{2x})^2} = \dfrac{1(3x+1)e^{2x} - x\left(3e^{2x}+(3x+1)2e^{2x}\right)}{(3x+1)^2e^{4x}}$

$= \dfrac{\cancel{e^{2x}}\left[(3x+1)-x(3+(3x+1)2)\right]}{(3x+1)^2 e^{\cancel{4x}}} = \dfrac{3x+1-x(3+6x+2)}{(3x+1)^2e^{2x}} = \dfrac{3x+1-5x-6x^2}{(3x+1)^2e^{2x}}$

$= \dfrac{-6x^2-2x+1}{(3x+1)^2e^{2x}}$

$f'=0 \quad -6x^2-2x+1=0 \quad \begin{cases} -\dfrac{1+\sqrt{7}}{6} \approx 0{,}274 \\ -\dfrac{1-\sqrt{7}}{6} \approx -0{,}608 \end{cases}$

segno di f' = (perché il denominatore è sempre +) segno di $-6x^2-2x+1$.

segno di f' $\quad - \; - \quad | \quad + \; + \; + \quad | \quad - \; - \; -$

$\qquad\qquad -0{,}608 \qquad 0{,}274$

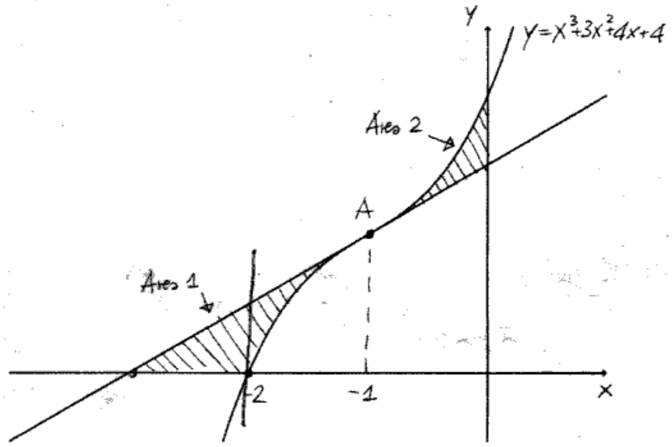
crescenza di f $\quad \searrow \quad \nearrow \quad \searrow$

$f(0{,}274) \approx 0{,}09 \qquad f(-0{,}608) \approx 2{,}489$

Grafico: vedi ultima pagina

4) (6 punti) Nella figura compare il grafico della funzione $f = x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ e la retta tangente a questo grafico nel punto A. Nel disegno è indicata la coordinata x di A.

a) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in A;
b) Calcolare i valori delle due aree tratteggiate Area 1 e Area 2. (Suggerimento: per calcolare il valore dell'Area 1 conviene dividere quell'area in due parti)



equazione della retta	
integrale/i per calcolare Area 1	$\frac{1}{2} + \int_{-2}^{-1} (x+3) - (x^3+3x^2+4x+4)\, dx$
integrale/i per calcolare Area 2	$\int_{-1}^{0} (x^3+3x^2+4x+4) - (x+3)\, dx$
valore del calcolo di Area 1 $3/4$	valore del calcolo di Area 2 $1/4$

Svolgimento:

1) $m = f'(-1) = 3x^2+6x+4$ calcolato in $x=-1$ $= 1$

~~[illegible]~~ $f(-1) = -1+3-4+4 = 2$ $\qquad A = (-1, 2)$

retta: $y - 2 = 1(x-(-1))$ cioè $y = x+3$

2) Area 1: la spezzo in due parti come in figura. Poiché la retta interseca l'asse x in $x=-3$ e la coordinata y del punto della retta che ha $x=-2$ è $-2+3$ cioè 1, il triangolo ha base e altezza uguali a 1 e la sua area è $\frac{1}{2}$. La seconda parte ha area

$$\int_{-2}^{-1} \text{retta} - f\, dx = \int_{-2}^{-1} (x+3) - (x^3+3x^2+4x+4)\,dx = \int_{-2}^{-1} -x^3-3x^2-3x-1\, dx =$$

$$\left[-\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x\right]_{-1}^{-2} = \left(-\frac{16}{4} + 8 - \frac{3}{2}\cdot 4 + 2\right) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}$$

$$\underline{\text{Area2}} = \int_{-1}^{0} (x^3+3x^2+4x+4) - (x+3)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3+3x^2+3x+1\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{2} - 1\right]^{-1} = \frac{1}{4}$$

5) (7 punti) Considerate $\int_{-1}^{1} e^{2x} + x^2 \, dx$.

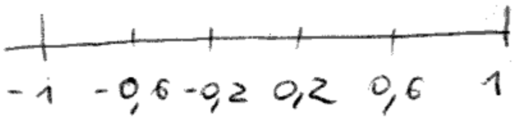
a) (4 punti) Calcolatene un valore approssimato tramite il metodo del trapezio con $n = 5$;

b) (3 punti) Invece di $n = 5$ quanto grande si deve prendere n per essere sicuri che il metodo del trapezio ci dia una risultato che si discosta al massimo di $0,001$ dal valore esatto dell'integrale?

valore approssimato con $n = 5$	4,5382
n che garantisce una accuratezza di $0,001$	146

a) Svolgimento:

$$\Delta x = \frac{1-(-1)}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$



x	f
-1	$1,1353$
$-0,6$	$0,66119$
$-0,2$	$0,71032$
$0,2$	$1,5318$
$0,6$	$3,6801$
1	$8,3891$

$$\int_{-1}^{1} (e^{2x}+x^2)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\Big(f(-1)+2f(-0,6)+2f(-0,2)$$

$$+2f(0,2)+2f(0,6)+f(1)\Big)$$

$$= 0,2\Big(1,1353+2\cdot 0,66119+2\cdot 0,71032+$$

$$+2\cdot 1,5318+2\cdot 3,6801+8,3891\Big)$$

$$= 0,2 \cdot 22,69122 = 4.538244$$

b) Calcolo il massimo di $|f''|$ in $[-1,1]$.

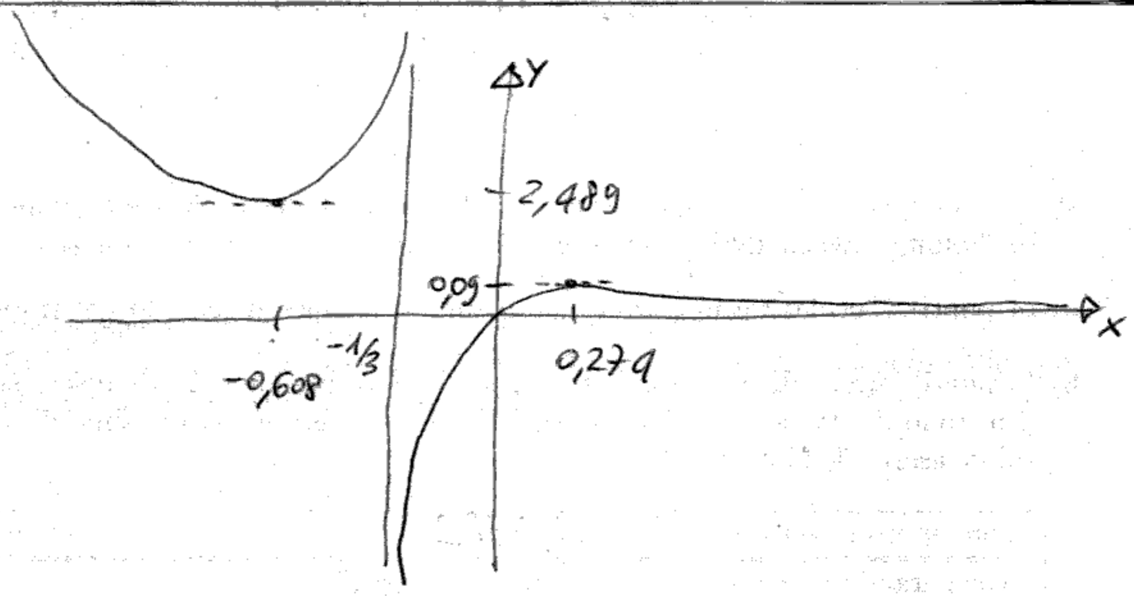
$f' = 2e^{2x}+2x \qquad f'' = 4e^{2x}+2$. f'' è sempre ≥ 0, quindi $|f''| = f''$

f'' è crescente (perché $(4e^{2x}+2)'$ è sempre >0). Allora il suo massimo è in $x=1$. $f''(1)$ è $4e^2+2 \leq 32$.

Allora nel teorema sulla stima dell'errore di approssimazione posso prendere $K=32$. Il teorema afferma che

$|\text{Errore di approssimazione}| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2} = \frac{32\cdot 2^3}{12\, n^2}$. Se voglio che questo errore sia inferiore a $0,001$ basta scegliere n in modo che $\frac{32\cdot 8}{12\, n^2} < 0,001$, cioè $n \geq 146$

Exe 3 :



B

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 23 Gennaio 2017

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Risolvere l'equazione $4\log_3(x-6) = 12$

soluzione $x = 33$

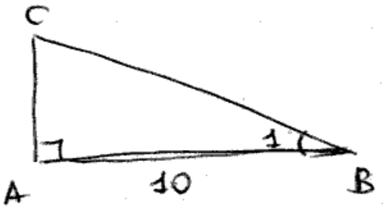
CF: $x - 6 > 0 \Rightarrow x > 6$

$\frac{4}{4}\log_3(x-6) = \frac{12}{4} \Rightarrow \log_3(x-6) = 3$

$\Rightarrow x - 6 = 3^3 \Rightarrow x = 27 + 6 = 33$ ACC.

1b) (1,5 punti) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\hat{B}C$ è 1 radiante e la lunghezza del cateto AB è 10. Calcolare la lunghezza dell'ipotenusa CB.

soluzione $CB = 18,52$

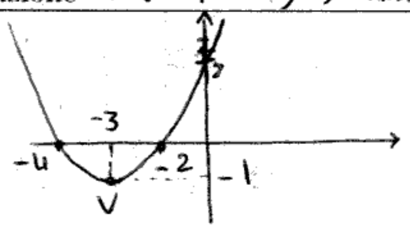


$CB \cdot \cos(A\hat{B}C) = AB$

$\Rightarrow CB = \frac{10}{0,54} = 18,52$

1c) (1,5 punti) Disegnare uno schizzo del grafico della parabola $y = x^2 + 6x + 8$, indicando in particolare le coordinate del vertice e le coordinate x delle intersezioni con l'asse x.

soluzione $V(-3,-1)$, $B(-2,0)$, $C(-4,0)$



$V = \left(-\frac{6}{2}, -\left(\frac{36-32}{4}\right)\right) = (-3,-1)$

INTERSEZIONI CON ASSE x

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Delta = 36 - 32 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2}{2}$ $\begin{cases} -4 & (-4,0) \\ -2 & B(-2,0) \end{cases}$

1d) (1,5 punti) Scrivere una primitiva di $(\sqrt{x}+2)^2 + e^2$

soluzione $x^2/2 + 8/3\, x\sqrt{x} + (4+e^2)x + C$

$\int [(\sqrt{x}+2)^2 + e^2]\,dx = \int (x + 4\sqrt{x} + 4 + e^2)\,dx$

$= \frac{x^2}{2} + 4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + (4+e^2)x + C$

2) (6 punti) Considerate la tabella seguente

X	Y
-2	1
-1	20
6	60

a) Calcolate la media e la varianza dei dati X;

b) Cercate la funzione esponenziale $Y = a\,p^X$ che meglio approssima i dati: calcolate i coefficienti a e p; calcolate il coefficiente CP corrispondente a questa interpolazione e dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo esponenziale oppure no;

media(X)= 1	; varianza(X)= 12,67

equazione retta di regressione del problema "trasformato": $z = 0{,}165x + 0{,}861$	
$a =$ 7,2594	; $p =$ 1,4638
$CP=$ 0,7838	; Y dipende da X in modo esponenziale oppure no? NO

Svolgimento:

Compito 2

	X	Y	Z:=Log y	X^2	Z^2	ZX
	-2,00	1	0,00	4	0,000	0,000
	-1,00	20	1,30	1	1,693	-1,301
	6,00	60	1,78	36	3,162	10,669
media	1,00		1,03	13,67	1,62	3,12
varianza	12,67		0,56			

regressione lineare associata

m=	media xz-media(x)media(z)	2,096		0,165
	varianza(x)	12,667		
q=	media(z)-m*media(x)	0,861		

regressione esponenziale

a=	10^q	7,259417		
p=	10^m	1,463835		
Rq (calcolato da calc)=	0,6143			
CP=	media(xz)-media(x)media(z)	2,0962		0,7838
	devstand(x)devstand(z)	2,6744		
CP calcolato da calc=				0,7838
R^2=				0,6143

3) (7 punti) Sia $f(x) = \dfrac{(2x+1)e^{2x}}{x^2}$.

Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva $(-1/2, +\infty)$	intervalli in cui è negativa $(-\infty, -1/2)$
e x in cui f è zero $x = -1/2$	
derivata prima di f $2e^{2x}(2x^2-1)/x^3$	
intervalli in cui f cresce $(-1/\sqrt{2}, 0) \cup (1/\sqrt{2}, +\infty)$	e in cui decresce altrove
x in cui si annulla f' e valore di f in essi $f(1/\sqrt{2}) \approx 20$	$f(-1/\sqrt{2}) \approx -0{,}20$

Svolgimento e grafico:

$f = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

segno di f:

		$-1/2$	
segno di $2x+1$	$- \; -$		$+ \; +$
" " x^2	$+ \; +$		$+ \; +$
" " e^{2x}	$+$		$+ \; +$
" " f	$- \; -$		$+ \; +$

$$f' = \frac{((2x+1)e^{2x})' x^2 - (2x+1)e^{2x}(x^2)'}{x^4} = \frac{(2e^{2x} + (2x+1)2e^{2x})x^2 - (2x+1)e^{2x}\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{xe^{2x}[(2+4x+2)x - (2x+1)2]}{x^4} = \frac{e^{2x}\cdot 2(2x^2-1)}{x^3}$$

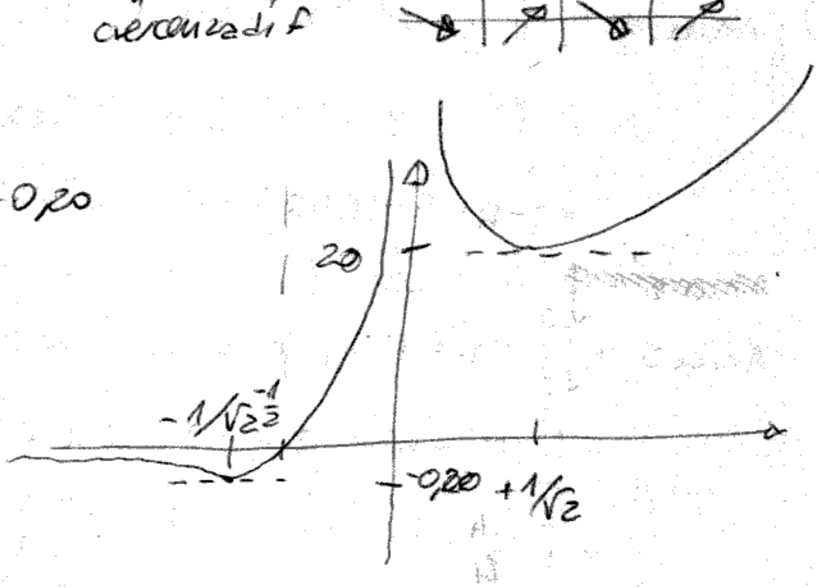
$f' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$

segno di f' = segno di $\dfrac{2x^2-1}{x^3}$ =

	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	
segno di $2x^2-1$	$+$	$-$	$-$	$+$
" " x^3	$-$	$-$	$+$	$+$
" " f'	$-$	$+$	$-$	$+$
crescenza di f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}(2+\sqrt{2}) \approx 20$

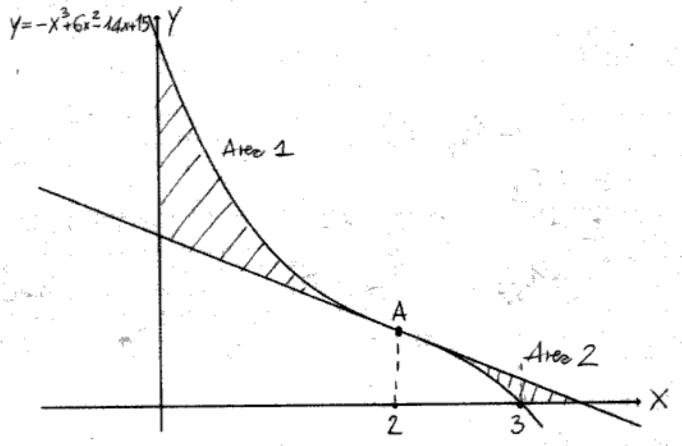
$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-2+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}\sqrt{2} \approx -0{,}20$



4) (6 punti) Nella figura compare il grafico della funzione $f = -x^3 + 6x^2 - 14x + 15$ e la retta tangente a questo grafico nel punto A. Nel disegno è indicata la coordinata x di A.

a) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in A;

b) Calcolare i valori delle due aree tratteggiate Area 1 e Area 2. (Suggerimento: per calcolare il valore dell'Area 2 conviene dividere quell'area in due parti)



equazione della retta	$y = -2x + 7$
integrale/i per calcolare Area 1	$\int_0^2 (-x^3+6x^2-12x+8)\,dx$
integrale/i per calcolare Area 2	$\int_2^3 (x^3-6x^2+12x-8)\,dx + \int_3^{7/2}(-2x+7)\,dx$
valore del calcolo di Area 1 $\quad 4$	valore del calcolo di Area 2 $\quad 1/2$

Svolgimento:

a) $y_A = -(2)^3 + 6(2)^2 - 14\cdot(2) + 15 = -8 + 24 - 28 + 15 = +3$

$A(2,3)$

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 14$, $f'(2) = -3\cdot(2)^2 + 12(2) - 14 = -2 = m$

$r: \; y = mx + q \quad m = -2$ e passa per il p.to A

$\Rightarrow 3 = -2\cdot 2 + q \Rightarrow q = 7$

$\Rightarrow y = -2x + 7$

b) $$\text{Area } 1 = \int_0^2 \left[(-x^3+6x^2-14x+15) - (-2x+7)\right]dx$$

$$= \int_0^2 (-x^3+6x^2-12x+8)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 6x^2 + 8x\right]_0^2$$

$$= (-4+16-24+16) - 0 = 4$$

INTERSEZIONE DI r CON ASSE x: $0 = -2x+7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

$$\text{Area } 2 = \int_2^3 \left[(-2x+7) - (-x^3+6x^2-14x+15)\right]dx + \int_3^{7/2}(-2x+7)\,dx$$

$$= \int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)\,dx + \int_3^{7/2}(-2x+7)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2 - 8x\right]_2^3 + \left[-x^2 + 7x\right]_3^{7/2}$$

$$= \left[\frac{81}{4} - \cancel{54} + \cancel{54} - 24 - (4 - 16 + 24 - 16)\right] + \left[-\frac{49}{4} + \frac{49}{2} - (-9 + 21)\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

5) (7 punti) Considerate $\int_{-1}^{0,5} \sin(2x) + 2x^2 \, dx$.

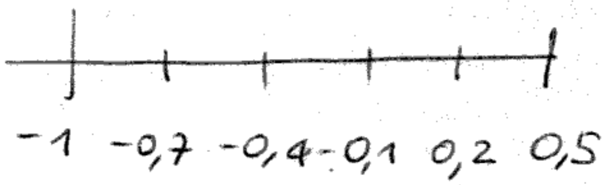
a) (4 punti) Calcolatene un valore approssimato tramite il metodo del trapezio con $n = 5$;

b) (3 punti) Invece di $n = 5$ quanto grande si deve prendere n per essere sicuri che il metodo del trapezio ci dia una risultato che si discosta al massimo di $0,001$ dal valore esatto dell'integrale?

valore approssimato con $n = 5$	0,3312
n che garantisce una accuratezza di $0,001$	42

Svolgimento:

a) $\Delta x = \frac{0,5-(-1)}{5} = \frac{1,5}{5} = 0,3$



x	f
-1	1,0907
-0,7	-0,0054
-0,4	-0,3974
-0,1	-0,1787
0,2	0,46942
0,5	1,3415

$$\int_{-1}^{0,5} (\operatorname{sen}(2x)+2x^2)\,dx \approx$$

$$\frac{\Delta x}{2}\Big(f(-1) + 2f(-0,7) + 2f(-0,4) + 2f(-0,1) + 2f(0,2) + f(0,5)\Big) =$$

$$= 0,15 \cdot \Big(1,0907 - 2 \cdot 0,0054 - 2 \cdot 0,3974 - 2 \cdot 0,1787 + 2 \cdot 0,46942 + 1,3415\Big)$$

$$= 0,15 \cdot 2,20804 = 0,33120$$

b) Calcolo $\max_{[-1,0.5]} |f''|$. $\quad f' = 2\cos(2x) + 4x \quad f'' = -2\operatorname{sen}(2x) + 4$

La funzione $-2\operatorname{sen}(2x)$ è ~~[illegible]~~ ≥ -2 e ≤ 2 (perché $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$)

Quindi $2 \leq f'' \leq 6$. Allora posso scegliere $K=6$ nel teorema sulla stima di approssimazione. Tale teorema afferma che

$$|\text{Errore di approssimazione}| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2} = \frac{6\left(\frac{3}{2}\right)^3}{12n^2}$$

Perché questo errore sia inferiore a 0,001 basta scegliere n in modo che $\frac{6}{12}\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{n^2} < 0,001$, cioè $n \geq 42$

Ⓒ

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 23 Gennaio 2017

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Risolvere l'equazione $3\log_4(x+6) = 6$

soluzione $x = 10$

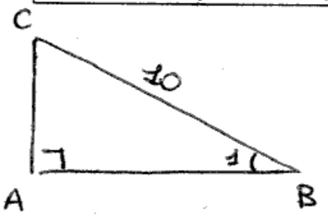
CE: $x+6>0 \quad x>-6$

$\frac{3}{3}\log_4(x+6) = \frac{6}{3} \Rightarrow \log_4(x+6) = 2$

$\Rightarrow x+6 = 4^2 \Rightarrow x+6 = 16 \Rightarrow x = 10$ ACC.

1b) (1,5 punti) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\widehat{B}C$ è 1 radiante e la lunghezza dell'ipotenusa BC è 10. Calcolare la lunghezza del cateto AB

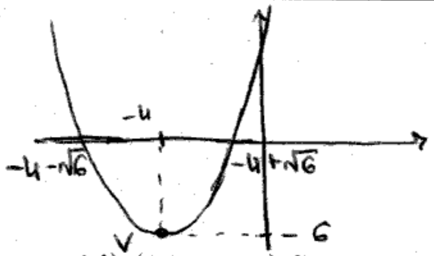
soluzione $AB = 5{,}4$



$\overline{AB} = CB \cdot \cos 1 = 10 \cdot (0{,}54) = 5{,}4$

1c) (1,5 punti) Disegnare uno schizzo del grafico della parabola $y = x^2 + 8x + 10$, indicando in particolare le coordinate del vertice e le coordinate x delle intersezioni con l'asse x.

soluzione $V(-4,-6)$, $A(0,-4-\sqrt{6})$, $B(0,-4+\sqrt{6})$



$V\left(-\frac{8}{2}, -\frac{(64-40)}{4}\right) = (-4,-6)$

INTERSEZIONE ASSE x

$x^2+8x+10=0$

$\Delta = 64-40 = 24 \qquad x_{1,2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{6}}{2} \begin{matrix} -4-\sqrt{6} \\ -4+\sqrt{6} \end{matrix}$

1d) (1,5 punti) Scrivere una primitiva di $(\frac{2}{x}+1)^2 + \sqrt{2}$

soluzione $-\frac{4}{x} + 4\log|x| + (1+\sqrt{2})x + C$

$\int \left[\left(\frac{2}{x}+1\right)^2 + \sqrt{2}\right] dx = \int \left(\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x} + 1 + \sqrt{2}\right) dx$

$= -\frac{4}{x} + 4\log|x| + (1+\sqrt{2})x + C$

2) (6 punti) Considerate la tabella seguente

X	Y
-3	10
0	1
9	0,1

a) Calcolate la media e la varianza dei dati X;

b) Cercate la funzione esponenziale $Y = a\,p^X$ che meglio approssima i dati: calcolate i coefficienti a e p; calcolate il coefficiente CP corrispondente a questa interpolazione e dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo esponenziale oppure no;

media(X)= 2	; varianza(X)= 26

equazione retta di regressione del problema "trasformato": $z = -0{,}154x + 0{,}308$	
$a =$ 2,0309	; $p =$ 0,7017
$CP =$ −0,9608 ; Y dipende da X in modo esponenziale oppure no? SI	

Svolgimento:

Compito 3

	X	Y	Z:=Log y	X^2	Z^2	ZX
	-3,00	10	1,0000	9	1,000	-3,000
	0,00	1	0,0000	0	0,000	0,000
	9,00	0,1	-1,0000	81	1,000	-9,000
media	2,00		0,00	30,00	0,67	-4,00
varianza	26,00		0,67			

regressione lineare associata

m=	media xz-media(x)media(z)	-4,000	-0,154
	varianza(x)	26,000	
q=	media(z)-m*media(x)	0,308	

regressione esponenziale

a=	10^q	2,030918
p=	10^m	0,701704

Rq (calcolato da calc)= 0,9231

CP=	media(xz)-media(x)media(z)	-4,0000	-0,9608
	devstand(x)devstand(z)	4,1633	
CP calcolato da calc=			-0,9608
R^2=			0,9231

3) (7 punti) Sia $f(x) = \dfrac{(1-3x)e^{3x}}{x^2+7}$.

Il dominio di f è $\mathbb{R}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva $(-\infty, 1/3)$	intervalli in cui è negativa $(1/3, +\infty)$
e x in cui f è zero $1/3$	
derivata prima di f $xe^{3x}(-9x^2+6x-65)/(x^2+7)^2$	
intervalli in cui f cresce $(-\infty, 0)$	e in cui decresce $(0, +\infty)$
x in cui si annulla f' e valore di f in essi $x=0$ $f(0)=1/7$	

Svolgimento e grafico:

$f=0 \Rightarrow 1-3x=0 \Rightarrow x=1/3$

segno di f

	$x<1/3$	$x>1/3$
segno di $1-3x$	+ + + +	− − −
" " e^{3x}	+ + + +	+ + +
" " x^2+7	+ + + +	+ + +
segno di f	+ + + +	− − −

$$\text{Calcolo di } f' = \frac{((1-3x)e^{3x})'(x^2+7) - (1-3x)e^{3x}(x^2+7)'}{(x^2+7)^2} =$$

$$= \frac{(-3e^{3x} + (1-3x)3e^{3x})(x^2+7) - (1-3x)e^{3x}\,2x}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{e^{3x}\left[(-3+3(1-3x))(x^2+7) - 2x(1-3x)\right]}{(x^2+7)^2} = \frac{e^{3x}\left[-9x(x^2+7) - 2x(1-3x)\right]}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{xe^{3x}\left[-9x^2-63-2+6x\right]}{(x^2+7)^2} = \frac{xe^{3x}\left[-9x^2+6x-65\right]}{(x^2+7)^2}$$

$$f'=0 \Rightarrow x(-9x^2+6x-65)=0 \begin{cases} x=0 \\ -9x^2+6x-65=0 \to \text{mai } (\Delta<0) \end{cases}$$

segno di f'

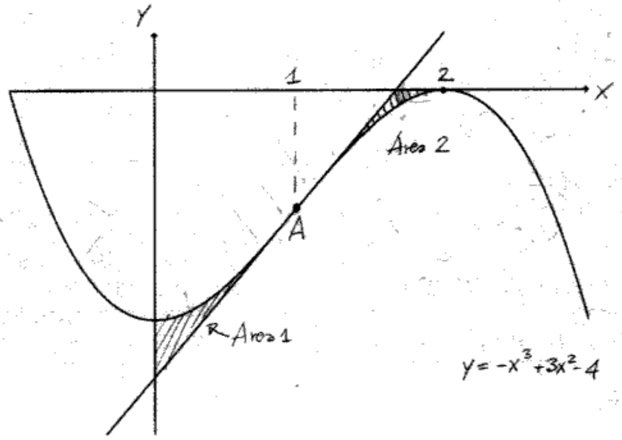
	$x<0$	$x>0$
segno di x	−	+
" di e^{3x}	+	+
" " $(-9x^2+6x+65)$	−	−
" " $(x^2+7)^2$	+	+
segno di f'	+	−
crescenza di f	$\nearrow$	$\searrow$

continua in ultima pagina

4) (6 punti) Nella figura compare il grafico della funzione $f = -x^3 + 3x^2 - 4$ e la retta tangente a questo grafico nel punto A. Nel disegno è indicata la coordinata x di A.

a) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in A;

b) Calcolare i valori delle due aree tratteggiate Area 1 e Area 2. (Suggerimento: per calcolare il valore dell'Area 2 conviene dividere quell'area in due parti)



equazione della retta $y = 3x - 5$	
integrale/i per calcolare Area 1 $\int_0^1 (-x^3+3x^2-3x+1)\,dx$	
integrale/i per calcolare Area 2 $\int_1^{5/3}(x^3-3x^2+3x-1)\,dx - \int_{5/3}^{2}(-x^3+3x^2-4)\,dx$	
valore del calcolo di Area 1 $1/4$	valore del calcolo di Area 2 $1/12$

Svolgimento:

a) $y_A = -1+3-4 = -2 \Rightarrow A(1,-2)$

$f'(x) = -3x^2+6x \Rightarrow f'(1) = 3$

$y = mx + q$, $m = 3$ e passa per A $\Rightarrow -2 = 3\cdot 1 + q \Rightarrow q = -5$

$\Rightarrow y = 3x - 5$, INTERSEZIONE ASSE x IN $x = \frac{5}{3}$

b) Area 1 $= \int_0^1 [(-x^3+3x^2-4)-(3x-5)]\,dx = \int_0^1 (-x^3+3x^2-3x+1)\,dx$

$= \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{2} + 1 - 0 = \frac{1}{4}$

Prima parte Area 2 $= \int_1^{5/3} [(3x-5)-(-x^3+3x^2-4)]\,dx = \int_1^{5/3} (x^3-3x^2+3x-1)\,dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x\right]_1^{5/3}$

Seconda parte Area 2 $= -\int_{5/3}^{2} (-x^3+3x^2-4)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_{5/3}^{2}$

$\Rightarrow$ Area 2 $= \int_1^{5/3} (x^3-3x^2+3x-1)\,dx - \int_{5/3}^{2} (-x^3+3x^2-4)\,dx$

$= \cancel{\left(\frac{5}{3}\right)^4\frac{1}{4}} - \cancel{\left(\frac{5}{3}\right)^3} + \frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{5}{3} - \frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{2} + 1$

$+ \frac{2^4}{4} - 2^3 + 8 - \cancel{\left(\frac{5}{3}\right)^4\frac{1}{4}} + \cancel{\left(\frac{5}{3}\right)^3} - 4\cdot\frac{5}{3} = \frac{1}{12}$

5) (7 punti) Considerate $\int_{-0,5}^{0,5} \cos(2x) + 3x^2 \, dx$.

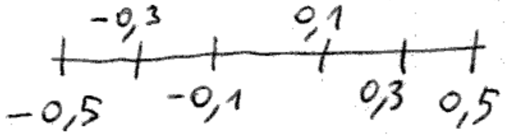
a) (4 punti) Calcolatene un valore approssimato tramite il metodo del trapezio con $n = 5$;

b) (3 punti) Invece di $n = 5$ quanto grande si deve prendere n per essere sicuri che il metodo del trapezio ci dia una risultato che si discosta al massimo di 0,001 dal valore esatto dell'integrale?

valore approssimato con $n = 5$	1,1002
n che garantisce una accuratezza di 0,001	21

Svolgimento:

a) $\Delta x = \dfrac{0,5-(-0,5)}{5} = \dfrac{1}{5} = 0,2$



x	$f(x)$
-0,5	1,2903
-0,3	1,0953
-0,1	1,0101
+0,1	1,0101
+0,3	1,0953
+0,5	1,2903

$$\int_{-0,5}^{0,5} \cos(2x)+3x^2\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\Big(f(-0,5)+2f(-0,3)+2f(-0,1)+2f(0,1)+2f(0,3)+f(0,5)\Big) =$$

$$0,1\cdot\big(1,2903+2\cdot 1,0953+2\cdot 1,0101+2\cdot 1,0101+2\cdot 1,0953+1,2903\big) =$$

$$= 0,1\cdot(11,0022)$$

$$= 1,1002$$

b) Calcolo il max di $|f''|$ in $[-0,5, 0,5]$. Con gli stessi ragionamenti spiegati nell'esercizio corrispondente del compito B si vede che

$$4 \le f''(x) \le 8$$

Quindi nel teorema sulla stima di approssimazione posso prendere $K = 5$.
Tale teorema dice che

$$|\text{Errore di approssimazione}| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2} = \frac{8\cdot 1^3}{12n^2}$$

Affinché questo errore sia inferiore a 0,001 basta che

$$\frac{8}{12n^2} < 0,001, \quad \text{cioè} \quad n \ge 26$$

$f(0) = 1/7$