Nome e cognome:

Prova scritta di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
22 Luglio 2016

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Scrivere il coefficiente angolare della retta che è tangente alla curva $y = \sqrt{x^2+1}$ nel punto $(-1, \sqrt{2})$.

soluzione

$m = f'(-1) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} \cdot \cancel{2}x$ calcolato per $x = 1$

$= \frac{-1}{\sqrt{2}}$

1b) (1,5 punti) Scrivere la derivata seconda di $\frac{x}{e^x}$ in $x = 1$.

soluzione

$f' = \frac{1 \cdot e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$

$f'' = \frac{-1 \cdot e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-1-1+x}{e^x} = \frac{-2+x}{e^x}$; $f''(1) = -\frac{1}{e}$

1c) (1,5 punti) Calcolare una primitiva della funzione $(x+1)^2 + \frac{1}{x^{10}} + \frac{1}{x}$.

soluzione

La funzione può essere scritta come $x^2+1+2x+x^{-10}+\frac{1}{x}$.
Allora una sua primitiva è $\frac{x^3}{3}+x+x^2+\frac{x^{-9}}{-9}+\ln|x|$

1d) (1,5 punti) Risolvere l'equazione $\log_2(x+3) = 3$.

soluzione

$\log_2(x+3) = 3 \Rightarrow x+3 = 2^3 \Rightarrow x = 5$

2) (6 punti) Considerate la tabella seguente

X	Y
-2	2
3	-2
5	-2

a) Calcolate la media e la varianza dei dati X;

b) Studiate se la Y dipende in modo lineare dalla X: calcolate la retta di regressione lineare, calcolate il coefficiente R^2 e, sulla base di R^2, dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo lineare oppure no;

media(X)= 2	; varianza(X)= $\frac{26}{3} = 8,\overline{6}$

equazione retta di regressione del problema associato: $y = -\frac{8}{13}x + \frac{22}{39}$
$R^2 = 0,9231$; Y dipende da X in modo lineare oppure no? NO

Svolgimento:

	X	Y	X^2	Y^2	XY
	-2	2	4	4	-4
	3	-2	9	4	-6
	5	-2	25	4	-10
media	2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{38}{3}$	4	$-\frac{20}{3}$

$$\text{varianza}(X) = \text{media}(X^2) - (\text{media}\,X)^2 = \frac{38}{3} - 4 = \frac{26}{3}$$

$$\text{varianza}(Y) = \text{media}(Y^2) - (\text{media}\,Y)^2 = 4 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 4 - \frac{4}{9} = \frac{32}{9}$$

$$m = \frac{\text{media}(XY) - \text{media}(X)\,\text{media}(Y)}{\text{varianza}(X)} = \frac{-\frac{20}{3} - (2)\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{26}{3}} = \frac{-\frac{20}{3} + \frac{4}{3}}{\frac{26}{3}} = \frac{-16}{26} = \frac{-8}{13}$$

cioè m è circa $-0,6154$

$$q = \text{media}(Y) - m \cdot \text{media}(X) = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{8}{13}\right) \cdot 2 = -\frac{2}{3} + \frac{16}{13} \approx 0,5641 \quad // \ \frac{22}{39}$$

$$R^2 = \frac{(\text{media}(XY) - \text{media}(X)\,\text{media}(Y))^2}{\text{varianza}(X) \cdot \text{varianza}(Y)} = 0,9231$$

$$CP = \frac{\text{media}(XY) - \text{media}(X)\,\text{media}(Y)}{\sqrt{\text{varianza}(X)}\,\sqrt{\text{varianza}(Y)}} = -0,9607$$

3) (8 punti) Sia $f(x) = \dfrac{1}{2x-2} - \dfrac{1}{x}$.

Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1, x \neq 0\}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ e infine $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.

a) Dite dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivete la derivata prima di f e dite dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnate il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva $(-\infty,0)\cup(1,2)$	intervalli in cui è negativa $(0,1)\cup(2,+\infty)$
derivata prima di f	
intervalli in cui f cresce	e in cui decresce
x in cui si annulla f' e valore di f in essi	

Svolgimento e grafico:

a) Per studiarne il segno riscriviamo f come una unica funzione

$$f(x) = \frac{x-(2x-2)}{x(2x-2)} = \frac{2-x}{2x^2-2x}$$

		0		1		2	
segno numeratore	+		+		+		−
" denominatore	+		−		+		+
" f	+		−		+		−

b) $$f' = \frac{-1\cdot(2x^2-2x)-(2-x)(4x-2)}{(2x^2-2x)^2} = \frac{2x^2-8x+4}{4(x^2-x)^2} = \frac{x^2-4x+2}{2(x^2-x)^2}$$

~~segno numeratore~~

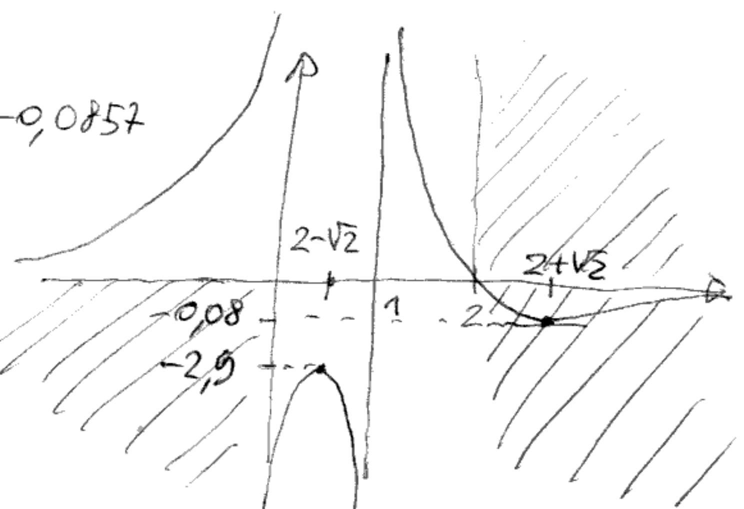
$$f'=0 \iff x^2-4x+2=0 \iff x = \frac{2\pm\sqrt{4-2}}{1} = 2\pm\sqrt{2} \quad \begin{matrix} 3{,}414 \\ 0{,}5858 \end{matrix}$$

segno f'

		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	
segno numeratore	+		−		+
segno denominatore	+		+		+
segno f'	+		−		+
crescenza di f	↗		↘		↗

$$f(2+\sqrt{2}) = \frac{2-(2+\sqrt{2})}{2((2+\sqrt{2})^2-2-\sqrt{2})} \approx \cancel{-0{,}1300}\ -0{,}0857$$

$$f(2-\sqrt{2}) = \frac{2-(2-\sqrt{2})}{2((2-\sqrt{2})^2-2+\sqrt{2})} \approx -2{,}9142$$



4) (5 punti) Calcolate il valore massimo e il valore minimo di $x - \ln(x+1)$ quando x varia nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

valore massimo=	0,1931
valore minimo=	0

Svolgimento:

trovo i valori di x in cui f' è zero.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Allora i punti di massimo e di minimo di f in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sono in uno dei tre seguenti punti

$$x = -\frac{1}{2}$$
$$x = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Calcolo il valore di f in questi punti

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}1931$$
$$f(0) = 0 - \ln(1) = 0$$
$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0{,}09453$$

Allora il valore massimo è ~~[illegible]~~ 0,1931 e quello minimo è 0.

5) (8 punti) Considerate la parabola $y = 9 - x^2$ e siano A e B i due punti in cui la retta $y = 2(x + 3)$ interseca la parabola.

- Scrivete l'integrale che esprime la lunghezza dell'arco di parabola compreso tra A e B;
- Calcolate un valore approssimato dell'integrale precedente mediante il metodo dei punti medi con $n = 4$.

Integrale che esprime la lunghezza	$\int_{-3}^{1} \sqrt{1+4x^2}$
Valore approssimato ottenuto	11,0897

Svolgimento:

Intersezione tra retta e parabola

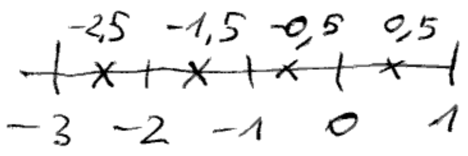
$$\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = 2(x+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 - x^2 = 2x+6 \\ y = 2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -3 & y = 0 \\ x = 1 & y = 8 \end{matrix}$$

$A = (-3, 0) \quad B = (1, 8)$

L'integrale che esprime la lunghezza è $\displaystyle\int_{-3}^{1} \sqrt{1 + ((9-x^2)')^2}\, dx$

cioè $\displaystyle\int_{-3}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$

Divido $[3, 1]$ in 4 parti uguali



$\Delta x = \dfrac{1-(-3)}{4} = 1$

x	$\sqrt{1+4x^2}$
-2,5	5,099
-1,5	3,1623
-0,5	1,4142
0,5	1,4142

allora

integrale $\approx \Delta x \left(\sqrt{1+4(-2,5)^2} + \sqrt{1+4(-1,5)^2} + \right.$

$\left. + \sqrt{1+4(-0,5)^2} + \sqrt{1+4\cdot(0,5)^2} \right)$

$\approx 1 \cdot (5,099 + 3,1623 + 1,4142 + 1,4142)$

$= 11,0897$