Nome e cognome:

Prova scritta di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
22 Giugno 2016

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) L'equazione $10^x + 6 = 9$ ha soluzione? E l'equazione $10^x + 9 = 6$? Se la soluzione esiste scriverla.

soluzione

$10^x + 6 = 9 \Longrightarrow 10^x = 3 \Longrightarrow x = \log_{10} 3$ e sol. esiste

$10^x + 9 = 6 \Longrightarrow 10^x = -3$ la soluzione non esiste perché 10^x è sempre > 0, comunque si scelga x

1b) (1,5 punti) Scrivere la derivata seconda di $\ln(x^3)$ in $x = 1$.

soluzione

$f' = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}$ $\quad f'' = -\frac{3}{x^2}$ $\quad f''(1) = -3$

1c) (1,5 punti) Calcolare media e varianza dei numeri $\{4, 4, 10, 2\}$.

soluzione

Media $= \frac{4+4+10+2}{4} = \frac{20}{4} = 5$

Varianza $= \frac{(4-5)^2 + (4-5)^2 + (10-5)^2 + (2-5)^2}{4} = \frac{1+1+25+9}{4} = 9$

1d) (1,5 punti) Studiare il segno di $3x + \frac{75}{x+10}$.

soluzione $\quad \leq 0$ se $x \leq -10$, ≥ 0 se $x \geq -10$, $= 0$ se $x = -5$

$$3x + \frac{75}{x+10} = \frac{3x(x+10)+75}{x+10} = \frac{3(x^2+10x+25)}{x+10}$$

segno del numeratore: sempre ≥ 0 eccetto in $x = -5$ (in cui è zero)

" " denominatore: ≥ 0 se $x \geq -10$

		-10		-5	
	$+$		$+$		$+\ +\ +$
	$-$		$+$		$+\ +\ +$
segno	$-$		$+$		$+\ +\ +$

2) (6 punti) Sia $f(x) = 3x + \frac{15}{x} + \sqrt{2}$.

a) Esistono punti del grafico di f in cui la retta tangente al grafico è orizzontale? (Spiegare la risposta.) Se esistono scrivere l'equazione delle tangenti;

b) Sia $A = (3, 14 + \sqrt{2})$. La retta $y - 14 - \sqrt{2} = 4(x - 3)$ è tangente al grafico nel punto A? (Spiegare la risposta.) Se non lo è scrivere l'equazione della retta tangente al grafico in A.

Risposta alla domanda a):
Risposta alla domanda b):

Svolgimento:

a) Esistono se e solo se esistono x in cui f' è zero

Calcolo $f'(x) = 3 - \frac{15}{x^2}$

Risolvo l'equazione $f'(x) = 0$ $\quad 3 - \frac{15}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 15}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$;

Allora Esistono due punti del grafico in cui la tangente è orizzontale: i punti di coordinata x uguale a $\pm\sqrt{5}$

Poichè $f(\sqrt{5}) = 6\sqrt{5} + \sqrt{2}$ e $f(-\sqrt{5}) = -6\sqrt{5} + \sqrt{2}$ i punti sono

$B = (\sqrt{5} ; 6\sqrt{5} + \sqrt{2})$ e $C = (-\sqrt{5} ; -6\sqrt{5} + \sqrt{2})$.

L'eq. della retta tangente in B è $y = 6\sqrt{5} + \sqrt{2}$, l'equazione di quella in C è $y = -6\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

b) Calcolo l'equazione della tangente al grafico in A

$m = f'(3) = 3 - \frac{15}{9} = \frac{4}{3}$. Allora l'equazione della retta è

$$y - 14 - \sqrt{2} = \frac{4}{3}(x - 3),$$

diversa dall'equazione scritta nel testo dell'esercizio.

3) (7 punti) Sia $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+x+1} - 1$.

Il dominio di f è $(-\infty, +\infty)$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

a) Dite dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivete la derivata prima di f e dite dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnate il grafico di f (senza tener conto della concavità).
d) Calcolate il valore minimo assoluto di f quando x varia in $[-3, 0]$.
e) Calcolate il valore massimo assoluto di f quando x varia in $[1, 4]$.

intervalli in cui f è positiva	intervalli in cui è negativa
derivata prima di f	
intervalli in cui f cresce	e in cui decresce
x in cui si annulla f' e valore di f in essi	
valore minimo in $[-3, 0]$	; valore massimo in $[1, 4]$

Svolgimento e grafico:

a) segno di f $\quad \dfrac{2x+2}{x^2+x+1} - 1 = \dfrac{(2x+2)-(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \dfrac{-x^2+x+1}{x^2+x+1}$.

$f=0 \iff -x^2+x+1=0 \qquad x = \dfrac{-1\pm\sqrt5}{-2}$ cioè $x = \dfrac{1+\sqrt5}{2} \approx 1{,}618$, $\quad \dfrac{1-\sqrt5}{2} \approx 0{,}618$

	$\frac{1-\sqrt5}{2}$		$\frac{1+\sqrt5}{2}$	
segno numeratore	−	+		−
" denominatore	+	+		+
" complessivo	−	+		−

b) $f' = \dfrac{2(x^2+x+1)-(2x+2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-2(x^2+2x)}{(x^2+x+1)^2}$

Allora f' si annulla in $x=0$ e in $x=-2$. Inoltre il suo segno è

		-2		0	
segno di f'	−		+		−
crescenza di f	↘		↗		↘

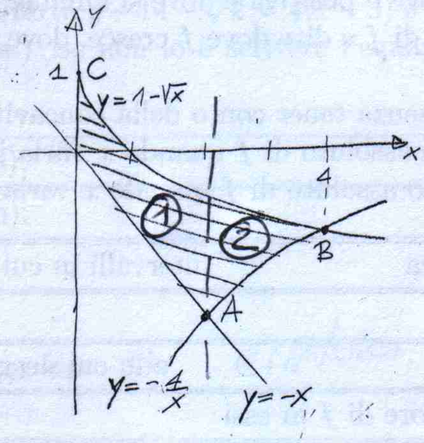
$f(0) = \frac{2}{1} - 1 = 1$; $f(-2) = \frac{-2}{3} - 1 = -\frac{5}{3} \sim -1{,}66$

d) ~~Allora~~ In $[-3,0]$ l'unico punto critico è $x=-2$. I candidati al minimo sono allora $x=-3$ $x=0$ e $x=-2$. Lo studio della crescenza di f permette di dire che il punto di minimo assoluto in $[-3,0]$ è $x=-2$. Il valore minimo assoluto è $-5/3$

e) La funzione è decrescente in $[1,4]$. Allora $x=1$ è il punto di massimo assoluto. Il valore massimo assoluto è $f(1)$ cioè $\frac{1}{3}$

c) Per il grafico vai a pagina 6

4) (6 punti) Nella figura sotto il punto B ha coordinate $(4,-1)$, il punto C ha coordinate $(0,1)$ e le coordinate del punto A vanno trovate da voi. Calcolate l'area della regione tratteggiata in figura.



coordinate del punto A:	$(2,-2)$
scrivete l'area tramite uno o più integrali:	
valore dell'area:	

Svolgimento:

Calcolo le coordinate di A $\begin{cases} y = -\frac{4}{x} \\ y = -x \end{cases} \Longrightarrow x = 2;\ y = -2$

Spezzo l'area in due parti tramite la retta $x = 2$

$$\text{Area} = \text{Area}_1 + \text{Area}_2 = \int_0^2 1-\sqrt{x}-(-x)\,dx + \int_2^4 1-\sqrt{x}-\left(-\frac{4}{x}\right)dx$$

$$= \int_0^2 1-\sqrt{x}+x\,dx + \int_2^4 1-\sqrt{x}+\frac{4}{x} = \int_0^2 1-\sqrt{x}\,dx + \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 1-\sqrt{x}\,dx +$$

$$+ \int_2^4 \frac{4}{x}\,dx = \int_0^4 (1-\sqrt{x})\,dx + \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 \frac{4}{x}\,dx$$

$$= \left[x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[4\ln x\right]_2^4$$

$$= 4 - \frac{2}{3}\sqrt{4^3} + 2 + 4(\ln 4 - \ln 2)$$

$$= 4 - \frac{2}{3}\cdot 8 + 2 + 4\ln\left(\frac{4}{2}\right) = 6 - \frac{16}{3} + 4\ln 2$$

5) (7 punti) Calcolate un valore approssimato dell'integrale

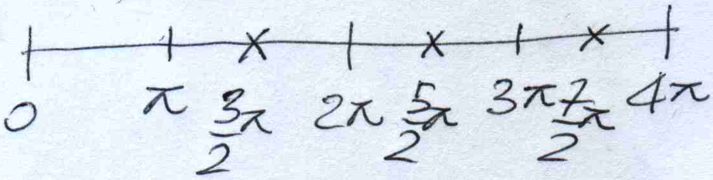
$$\int_{\pi}^{4\pi} \sqrt{1+\sin x}\, dx$$

usando il metodo di Simpson con $n = 6$.

Valore approssimato ottenuto

Svolgimento:

$$\Delta x = \frac{4\pi - \pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$



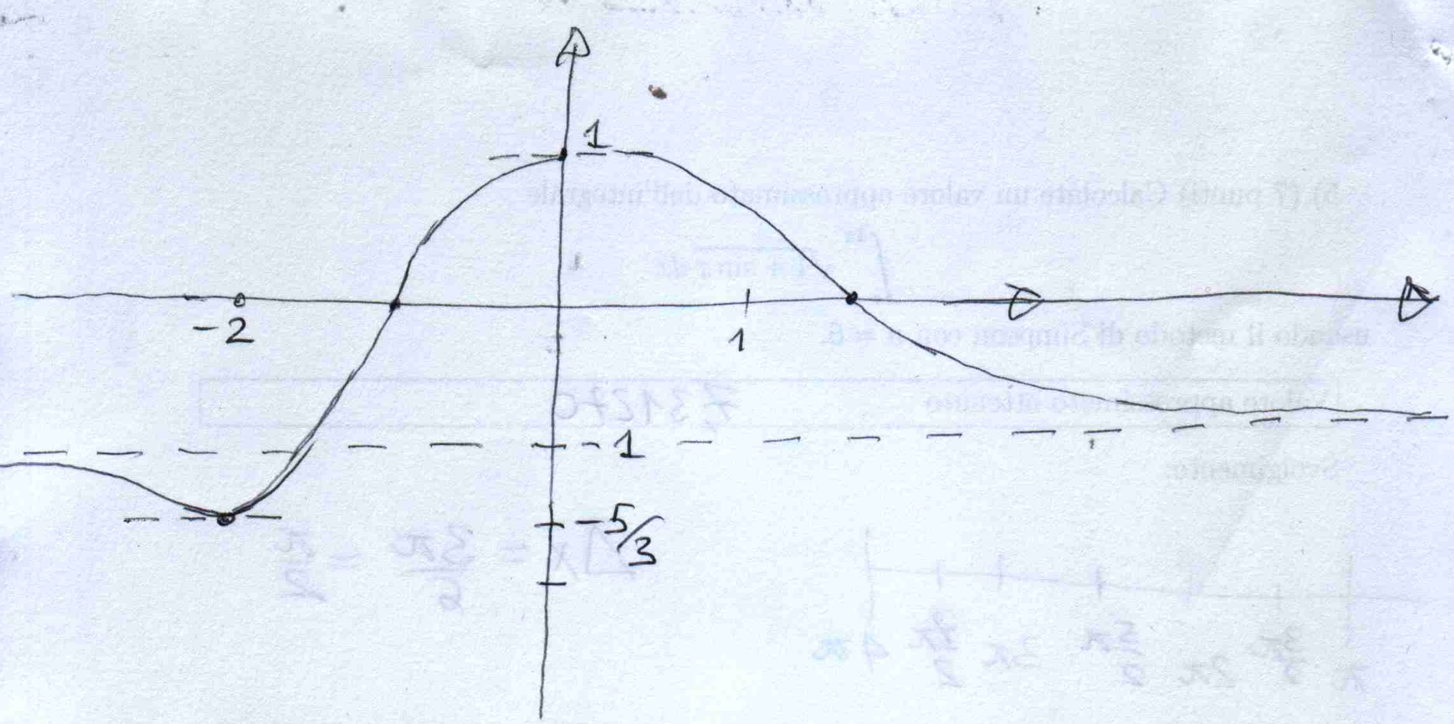
x	$\sqrt{1+\operatorname{sen} x}$
π	1
$\frac{3}{2}\pi$	0
2π	1
$\frac{5}{2}\pi$	$\sqrt{2}$
3π	1
$\frac{7}{2}\pi$	0
4π	1

$$\int_{\pi}^{4\pi} \sqrt{1+\operatorname{sen} x}\, dx \approx \frac{\frac{\pi}{2}}{3}\Big(\sqrt{1+\operatorname{sen}\pi} + 4\sqrt{1+\operatorname{sen}\tfrac{3}{2}\pi} + 2\sqrt{1+\operatorname{sen}2\pi}$$

$$+ 4\sqrt{1+\operatorname{sen}\tfrac{5}{2}\pi} + 2\sqrt{1+\operatorname{sen}3\pi} + 4\sqrt{1+\operatorname{sen}\tfrac{7}{2}\pi} + \sqrt{1+\operatorname{sen}4\pi}\Big)$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\left(1 + 4\cdot 0 + 2\cdot 1 + 4\cdot\sqrt{2} + 2\cdot 1 + 4\cdot 0 + 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\left(6 + 4\sqrt{2}\right) = \pi\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) \approx 6{,}10351$$


1
-2
1
-1
-5/3