A

Nome: Corso di laurea: 6, 9 o 12 crediti?

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 21 Febbraio 2012

1) (4 punti) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$(x \ \ln x)^{10}$$

$$(1 + \tan x) \ e^{x^2}$$

Svolgimento:

$$10(x\ln x)^9 \cdot (x \ln x)' = 10(x\ln x)^9\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= 10(x \cdot \ln x)^9 (1+\ln x)$$

$$(1+\tan x)' e^{x^2} + (1+\tan x)(e^{x^2})' = \frac{1}{(\cos x)^2} e^{x^2} + (1+\tan x) e^{x^2} \cdot 2x$$

2) (6 punti) Ricercare il massimo e il minimo assoluto della funzione $8x - 5\ln(4x^2+1)$ quando x varia nell'intervallo $[0, 1/2]$. Dire anche quali sono tutti i punti critici della funzione e se essi sono di massimo relativo, di minimo relativo o nessuno dei due.

Svolgimento:

Studio crescenza e decrescenza e punti critici

Derivata $= 8 - 5 \cdot \frac{8x}{4x^2+1} = \frac{8(4x^2+1) - 40x}{4x^2+1} = \frac{8(4x^2-5x+1)}{4x^2+1}$

Allora i punti critici sono $x = 1$ e $x = \frac{1}{4}$. Il segno della derivata implica che la crescenza della funzione è

$\nearrow \quad \frac{1}{4} \quad \searrow \quad 1 \quad \nearrow$

Di conseguenza nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$ $x = \frac{1}{4}$ è punto di max assoluto. Calcoliamo il valore della funzione nei candidati

$x = 0 \qquad f(0) = 0 \qquad \leftarrow$ punto di min assoluto

$x = \frac{1}{2} \qquad f(\frac{1}{2}) = 4 - 5\ln 2 \approx 0{,}53$

$x = \frac{1}{4} \qquad f(\frac{1}{4}) = 2 - 5\ln(\frac{5}{4}) \approx 0{,}88 \qquad \leftarrow$ punto di max assoluto

3) Sia $f(x) = \dfrac{(2x+1)^2}{x^3}$. La funzione ha come dominio $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$, .

(1) (2 punti) dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;

(2) (2,5 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici; .

(3) (3,5 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

(attenzione: non vi preoccupate se le ascisse dei punti in cui la derivata si annulla non sono numeri interi)

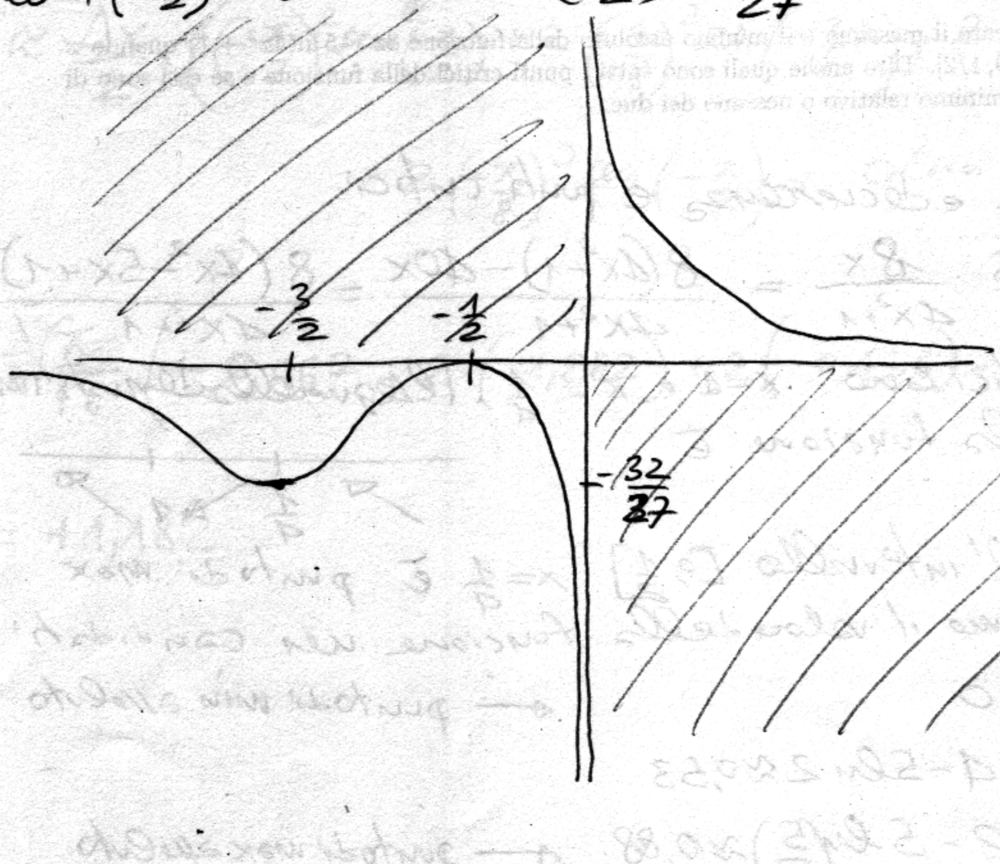
1) f vale 0 quando $2x+1=0$, cioè $x=-\frac{1}{2}$
il segno di f è positivo per $x>0$ e negativo per $x<0$
(notare che il numeratore è sempre ≥ 0)

2) $f'(x) = \dfrac{(8x+4)x^3 - (4x^2+1+4x)3x^2}{x^6} = -\dfrac{4x^2+8x+3}{x^4}$

	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	
segno di $-(4x^2+8x+3)$	$-$	$+$	$-$	$-$
segno di x^4	$+$	$+$	$+$	$+$
segno di f'	$-$	$+$	$-$	$-$

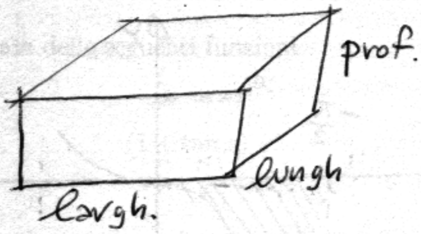
quindi f cresce in $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e decresce altrove

Calcolo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ e $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{32}{27}$



4) (4 punti) Quanto rapidamente sta cambiando il volume di una scatola rettangolare quando la lunghezza è di 6 cm, la larghezza è di 5 cm e la profondità di 4 cm, se sia la lunghezza che la profondità stanno aumentando con una rapidità di 1 cm/sec mentre la larghezza sta diminuendo con una rapidità di 2 cm/sec?

Svolgimento:



$Vol(t) = largh(t) \cdot lungh(t) \cdot prof(t)$. Allora

$$\frac{d}{dt} Vol = \left(\frac{d}{dt} largh\right) \cdot lungh \cdot prof + largh \left(\frac{d}{dt} lungh\right) \cdot prof + largh \cdot lungh \left(\frac{d}{dt} prof\right)$$

$$= (-2) \cdot 6 \cdot 4 + 5 \cdot 1 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot (+1)$$

$$= -48 + 20 + 30 = 2 \ cm^3/sec$$

5) (5 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale

$$\int_1^3 (3\sqrt{x}+6)^2 - \pi + 1 + \frac{1}{x}\, dx$$

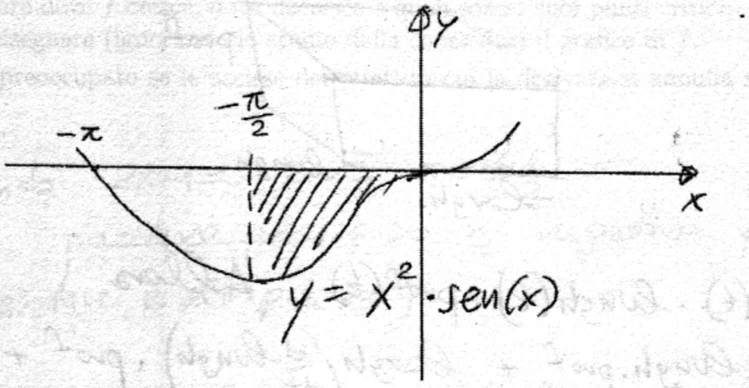
$$\int_1^3 9x + 36 + 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{x} - \pi + 1 + \frac{1}{x} \quad dx$$

$$= \frac{9x^2}{2} + 37x + 36 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}+1} - \pi \cdot x + \ln x \Big]_1^3$$

$$= \frac{9}{2}x^2 + (37-\pi)\,x + 24\,x^{\frac{3}{2}} + \ln x \Big]_1^3$$

$$= \left(\frac{9}{2}\, 9 + (37-\pi)\, 3 + 24 \cdot 3^{\frac{3}{2}} + \ln 3\right) - \left(\frac{9}{2} + (37-\pi) + 24 + 0\right)$$

6) (6 punti) Scrivere l'integrale che rappresenta l'area in figura. Non vi è richiesto di calcolare il valore esatto dell'area, poichè non è facile trovare le primitive necessarie. Calcolate invece un valore approssimato dell'area approssimando l'integrale con il metodo del trapezio con $n = 4$.



Svolgimento:

$$\text{Area} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (0 - x^2 \operatorname{sen} x)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} x^2 \operatorname{sen} x\, dx$$

$$-\frac{\pi}{2} \quad -\frac{3}{8}\pi \quad -\frac{\pi}{4} \quad -\frac{\pi}{8} \quad 0$$

$$\Delta x = \frac{+\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Area} \approx \frac{\Delta x}{2} \cdot \left(\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\left(-\frac{3}{8}\right)^2 \operatorname{sen}\left(-\frac{3}{8}\pi\right) + 2\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(-\frac{\pi}{8}\right)^2 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{8}\right) + 0^2 \operatorname{sen} 0 \right)$$

$$= \frac{\pi}{16}\left(-2,467 + 2\cdot(-1,282) + 2(-0,436) + 2\cdot(-0,059) + 0\right)$$

$$= +1,182$$

3) Sia $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{x^3}$. La funzione ha come dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, .

(1) (2 punti) dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;

(2) (2,5 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;

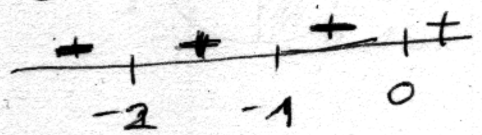
(3) (3,5 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

(attenzione: non vi preoccupate se le ascisse dei punti in cui la derivata si annulla non sono numeri interi)

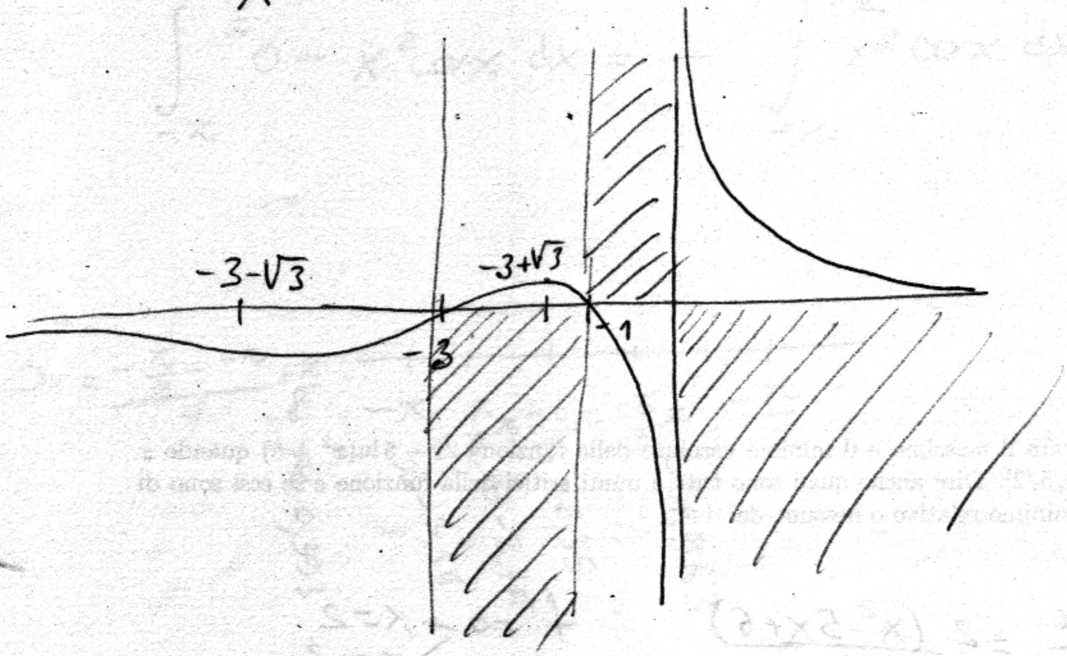
Conviene scrivere $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^3}$

$f = 0 \quad x = -1$ e $x = -2$

segno di f



$f' = -\dfrac{x^2+6x+6}{x^4}$ punti critici $x = -3 \pm \sqrt{3}$



3) Sia $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^3}$. La funzione ha come dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, .

(1) (2 punti) dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;

(2) (2,5 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;.

(3) (3,5 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

(attenzione: non vi preoccupate se le ascisse dei punti in cui la derivata si annulla non sono numeri interi)

$$f = \frac{x^2-4}{x^3}$$

$f' = 0$ $\quad x = -2$ e $x = 2$

segni di f

	-2		0		2	
$+$		$-$		$-$		$+$
$-$		$-$		$+$		$+$
$-$		$+$		$-$		$+$

$$f' = \frac{2x \cdot x^3 - (x^2-4)3x^2}{x^6} = -\frac{x^2 \quad +12}{x^4}$$

punti critici $\quad x = \pm 2\sqrt{3}$

crescenza di f $\quad \searrow \; -2\sqrt{3} \; \nearrow \; 0 \; \nearrow \; 2\sqrt{3} \; \searrow$

Grafico