Nome: Corso di laurea: 9 o 12 crediti?

Scritto di Matematica per cdl in Tecnologie Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 20 Febbraio 2013

1) (5 punti) Considerate la tabella seguente

	X	Y	X^2	Y^2	XY
	-1	1,4	1	1,96	-1,4
	1,5	7,7	2,25	59,29	11,55
	3,2	10	10,24	100	32
media	$1,2\bar{3}$	$6,3\bar{6}$	$4,49\bar{6}$	53,75	14,05

- Calcolate la media, la varianza e la deviazione standard dei dati Y.
- Calcolate la formula per la regressione lineare dei dati Y in funzione dei dati X
- Calcolate il coefficiente R^2 e, sulla base di R^2, dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo lineare.

Svolgimento:

a) $\text{media } Y = \frac{1,4+7,7+10}{3} = 6,3\bar{6}$. Calcolo anche $\text{media}(Y^2) = \frac{1,96+59,29+100}{3}$
$= 53,75$. Allora $\text{Var}(Y) = \text{media}(Y^2) - (\text{media}(Y))^2 = 53,75 - (6,3\bar{6})^2 = 13,215$
$\text{dev stand}(Y) = \sqrt{\text{Var}(Y)} = 3,63\ldots$

b) $m = \frac{\text{media}(XY) - \text{media}X \cdot \text{media}Y}{\text{Var}\,X} = \frac{14,05 - 1,2\bar{3} \cdot 6,3\bar{6}}{4,49\bar{6} - (1,2\bar{3})^2} \approx +2,0829$

$q \approx 3,7978$

c) $R^2 = \frac{(\text{media}(XY) - \text{media}(X) \cdot \text{media}(Y))^2}{\text{Var}X \cdot \text{Var}Y} \approx 0,9768$

Quindi è credibile che Y dipenda da X in modo lineare

2) (7 punti) Trovare il valore massimo e minimo assoluto di $f(x) = 2\ln(x) + (\ln(x))^2$ quando x varia nell'intervallo $[\frac{1}{5}, 1]$.

Svolgimento:

Il max e il min sono assunti o in $x = \frac{1}{5}$ o in $x = 1$ o in un eventuale punto di $[\frac{1}{5}, 1]$ in cui la derivata di f è zero.
Cerco tali punti. Calcolo $f' = 2 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$
cioè $f' = \frac{2(1+\ln x)}{x}$. Risolvo l'equazione $f'(x) = 0$, cioè
$\frac{2(1+\ln x)}{x} = 0$, cioè $1 + \ln x = 0$. Diventa $\ln x = -1$, cioè
$x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,3678$. Questo $x = \frac{1}{e}$ appartiene a $[\frac{1}{5}, 1]$ e quindi va preso in considerazione
Calcolo $f(\frac{1}{5}) \approx -0,62$, $f(\frac{1}{e}) = 2 \cdot (-1) + (-1)^2 = -1$
$f(1) = 0$. Allora $x = 1$ è il punto di max e $x = \frac{1}{e}$ è il punto di min assoluto.

3) Sia $f(x) = -x^{3/5}(x-4)^2$ La funzione ha come dominio $[0, +\infty)$ e inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Attenzione, la funzione sta sempre dalla stessa parte dell'asse x (non cambia mai segno) e interseca l'asse x in $x = 0$ e in un altro punto.

(1) (2,5 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
(2) (2,5 punti) dire dove f è concava verso l'alto e dove è concava verso il basso;
(3) (3 punti) disegnare il grafico di f tenendo conto di tutte le informazioni precedenti.

L'altro punto in cui il grafico interseca l'asse x è $x = 4$.

Noto che $f(x) = -x^{\frac35}(x^2-8x+16) = -x^{2+\frac35}+8x^{1+\frac35}-16x^{\frac35}$

(1) Calcolo $f'(x) = -\frac{13}{5}x^{1+\frac35}+8\cdot\frac85 x^{\frac35}-16\cdot\frac35 x^{\frac35-1} =$

$= \frac{x^{\frac35-1}}{5}\left(-13x^2+64x-48\right)$

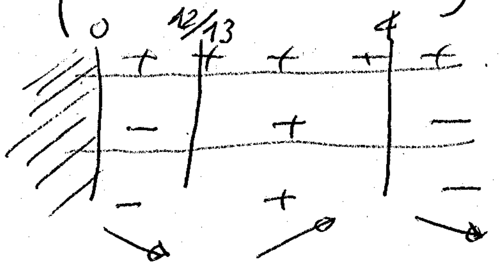
$*$ vedi pagina 4

segno di $x^{\frac35-1}$

segno di $-13x^2+64x-48$

segno di f'

crescenza di f



(2) Calcolo $f'' = -\frac{13}{5}\left(\frac85\right)x^{\frac35}+\frac{64}{5}\cdot\frac35 x^{\frac35-1}-\frac{48}{5}\left(-\frac25\right)x^{\frac35-2}$

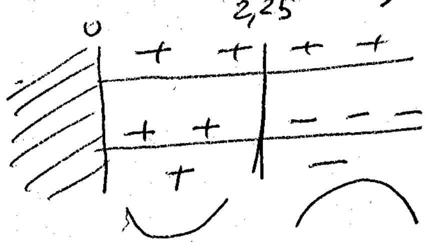
$= \frac{x^{\frac35-2}}{25}\left(-104x^2+192x+96\right) = \frac{8}{25}x^{\frac35-2}\left(-13x^2+24x+12\right)$

segno di $x^{\frac35-2}$

segno di $-13x^2+24x+12$

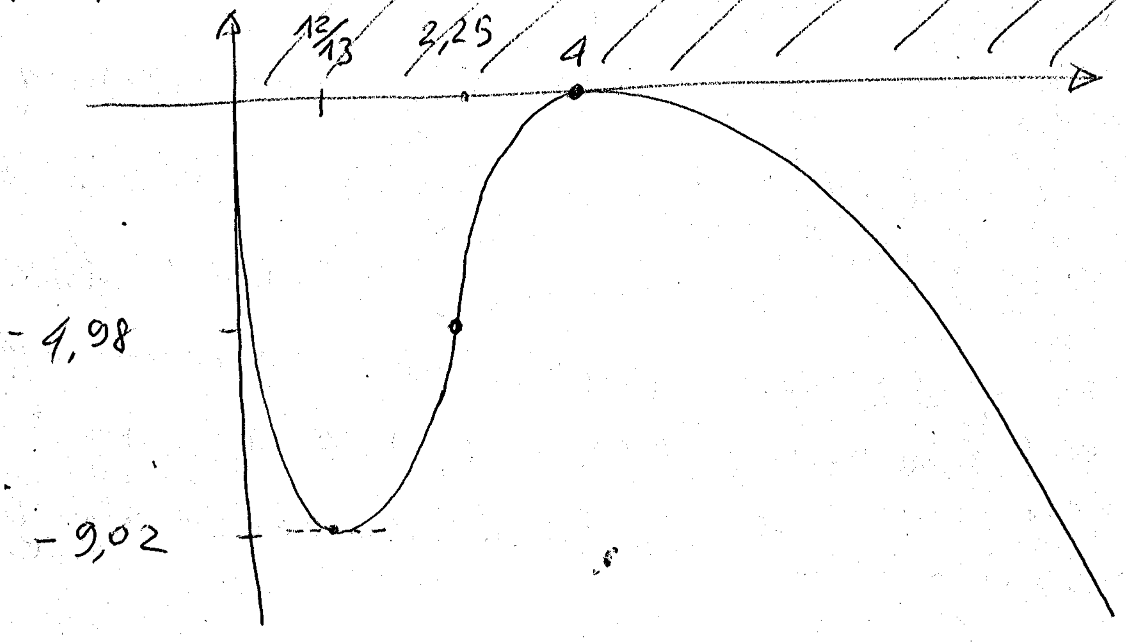
segno di f''

segno di concavità



Nota: $-13x^2+24x+12$ si annulla non solo in $x=2{,}25$ ma anche in un valore negativo di x. Poiché studiamo la f solo in $x\in[0,+\infty)$, ignoriamo cosa succede per $x<0$.

4) Calcolo $f\left(\frac{12}{13}\right)\approx -9{,}02$ e $f(2{,}25) = -4{,}98$



4)(6 punti) Calcolate l'integrale $\int_2^4 \cos x + 2\sqrt{3} + \frac{3+x}{\sqrt{x}}\,dx$ mediante il metodo delle primitive;

Svolgimento:

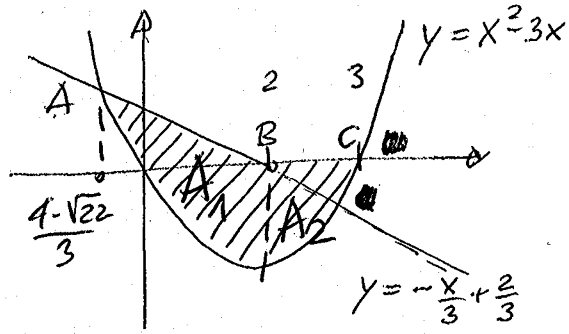
$$\int_2^4 \cos x + 2\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_2^4 + 2\sqrt{3}\cdot x\Big]_2^4 + \int_2^4 3x^{-\frac{1}{2}} + \int_2^4 \sqrt{x}\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_2^4 + 2\sqrt{3}\cdot x\Big]_2^4 + \frac{3}{1/2}x^{\frac{1}{2}}\Big]_2^4 + \frac{1}{3/2}x^{3/2}\Big]_2^4$$

$$= \underbrace{\operatorname{sen} 4 - \operatorname{sen} 2}_{-0{,}7568-0{,}9093} + 2\sqrt{3}(4-2) + 6\left(\sqrt{4}-\sqrt{2}\right) + \frac{2}{3}\left(4^{3/2}-2^{3/2}\right)$$

$$\approx [illegible] + 6{,}92 + 3{,}51 + 3{,}44$$

$$\approx 12{,}21$$

5) (7 punti) Calcolate l'area tratteggiata in figura.



Mi servono le coordinate x di A, B e C

Svolgimento:

$A: \begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} \end{cases} \to x^2 - 3x + \frac{x}{3} - \frac{2}{3} = 0 \quad x = \frac{4-\sqrt{22}}{3} \approx -0{,}23 \quad x = \frac{4+\sqrt{22}}{3}$ è >0, lo scarto

$B: \begin{cases} y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases} \quad x = 2$

$C: \begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = 0 \end{cases} \to x = 0 \quad x = 3$

Spezzo l'insieme con un taglio verticale in due parti A_1 e A_2 come in figura.

$$\text{Area } A_1 = \int_{\frac{4-\sqrt{22}}{3}}^{2} -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} - (x^2 - 3x)\,dx = \int_{\frac{4-\sqrt{22}}{3}}^{2} -x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{2}{3}\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{8}{6}x^2 + \frac{2}{3}x\right]_{\frac{4-\sqrt{22}}{3}}^{2}$$

$$\text{Area } A_2 = \int_2^3 0 - (x^2 - 3x)\,dx = \int_2^3 -x^2 + 3x\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\right]_2^3$$

Nota nell'esercizio 3.

Lo studio del segno della derivata poteva anche essere fatto in un altro modo, senza sviluppare il quadrato

$$\left(-x^{\frac{3}{5}}(x-4)^2\right)' = \left(-x^{3/5}\right)'(x-4)^2 - x^{\frac{3}{5}}\left((x-4)^2\right)'$$

$$= -\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}(x-4)^2 - x^{\frac{3}{5}}\;2(x-4)\cdot 1$$

metto in evidenza $x^{-\frac{2}{5}}$ e $(x-4)$

$$= -x^{-\frac{2}{5}}(x-4)\left[\frac{3}{5}(x-4) + x\cdot 2\right]$$

$$= -x^{-\frac{2}{5}}(x-4)\left[\frac{13}{5}x - \frac{12}{5}\right]$$

	0 – $\frac{12}{13}$	$\frac{12}{13}$ – 4	> 4
segno di $-x^{-\frac{2}{5}}$	$-$	$-$	$-$
segno di $(x-4)$	$-$	$-$	$+$
" " $\frac{13}{5}x - \frac{12}{5}$	$-$	$+$	$+$
segno di f'	$-$	$+$	$-$
crescenza di f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$