COMPITO A

Nome: Corso di laurea: 6, 9 o 12 crediti?

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 17 Gennaio 2012

1) (4 punti) In Nicaragua l'inflazione è così alta che i prezzi crescono del 20% ogni mese

a) Se un oggetto costa inizialmente 1000 quanto costa dopo t mesi?

b) Dopo quanti mesi quell'oggetto costa 2000?

(attenzione: la crescita dei prezzi si compone).

Svolgimento:

a) $\text{costo}(t) = 1000 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right)^t$

b) si deve risolvere l'equazione

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right)^t = 2000$$

cioè $(1,2)^t = 2$, $t = \log_{1,2}(2) = \frac{\ln 2}{\ln 1,2} \approx 3,8$

2) (6 punti) Ricercare il massimo e il minimo assoluto della funzione $\frac{-x}{x^2+1} + 2$ quando x varia nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, 2]$. Dire anche quali sono tutti i punti critici della funzione e se essi sono di massimo relativo, di minimo relativo o nessuno dei due.

Svolgimento: La funzione è continua, l'intervallo è chiuso e limitato e quindi tali max e min assoluti esistono

- Cerchiamo i punti critici di f

Calcolo $f' = \frac{-1(x^2+1) - (-x)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

Allora $f' = 0$ se $x = \pm 1$. Inoltre il segno di f' è $+ \quad -1 \quad - \quad 1 \quad +$

Quindi la crescenza di f è $\nearrow \quad -1 \quad \searrow \quad 1 \quad \nearrow$

Allora il punto $x = -1$ è un punto di max locale mentre $x = 1$ è di min locale. Di questi punti solo $x = 1$ appartiene all'intervallo $[-\frac{1}{2}, 2]$

I candidati punti di max e min assoluti sono

$x = -\frac{1}{2}$ $\quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{12}{5}$ $\leftarrow$ $x = -\frac{1}{2}$ è punto di max assoluto

$x = 1$ $\quad f(1) = \frac{3}{2}$ $\leftarrow$ $x = 1$ è punto di min assoluto

$x = 2$ $\quad f(2) = \frac{8}{5}$

3) Sia $f(x) = (2x+3)e^{(x^2)}$. La funzione ha come dominio $(-\infty, \infty)$ e inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(1) (1,5 punti) dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;

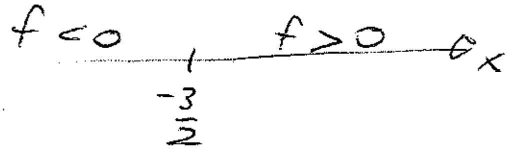
(2) (2,5 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;

(3) (3 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

(attenzione: una parte della funzione è composta)

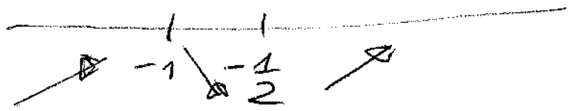
1) intersezioni con asse $x \iff f=0 \iff x = -\frac{3}{2}$

segno di f = segno di $(2x+3)e^{(x^2)}$ = segno di $2x+3$ (perchè e^{x^2} è sempre positiva). Quindi



2) $f'(x) = (4x^2+6x+2)e^{x^2}$. Quindi i punti critici sono $x=-1$ e $x=-\frac{1}{2}$

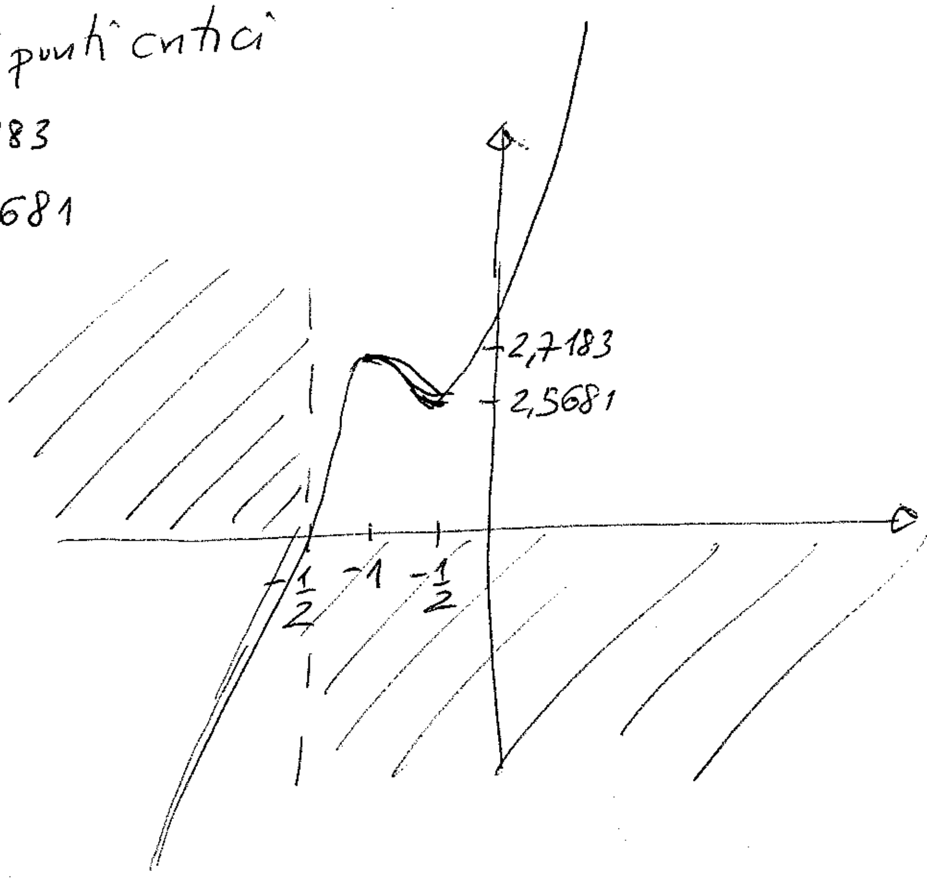
crescenza di f



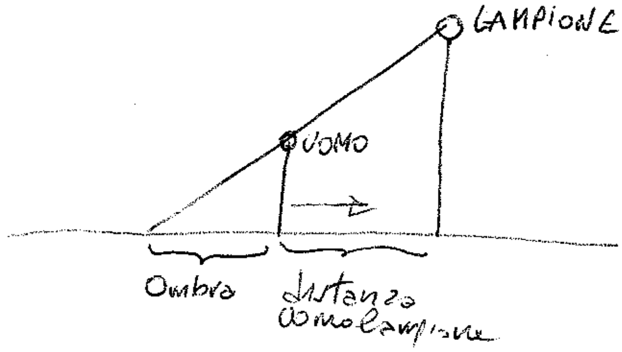
3) Valore di f nei punti critici

$f(-1) = 2,7183$

$f(-\frac{1}{2}) = 2,5681$



4) (4 punti) Un uomo alto 2 m cammina in direzione del palo di un lampione alla velocità di 0,5 m/s. Se il lampione è posto ad una altezza di 5 m da terra con quale velocità diminuisce la lunghezza dell'ombra dell'uomo quando lui si trova ad una distanza di 3 m dal palo? (suggerimento: la lunghezza dell'ombra si calcola usando la similitudine di due triangoli: uno che ha il lampione come altezza e l'altro l'uomo come altezza)



Svolgimento:

Per similitudine dei triangoli

$$\frac{\text{ombra} + \text{distanza}}{5} = \frac{\text{ombra}}{2}$$

Quindi $2\,\text{ombra} + 2\,\text{distanza} = 5\,\text{ombra}$

cioè $\text{ombra} = \frac{2}{3}\,\text{distanza}$.

Allora $\frac{d(\text{ombra})}{dt} = \frac{2}{3}\frac{d}{dt}\,\text{distanza} = \frac{2}{3}$

L'esercizio dice che $\frac{d}{dt}\,\text{distanza} = -0,5$. Quindi $\frac{d}{dt}(\text{ombra}) = \frac{2}{3}\cdot(-0,5) = -\frac{1}{3}$

5) (6 punti) Si vuole calcolare la lunghezza del grafico di $\sin(2x)$ tra i suoi punti di ascissa $x = 1$ e $x = 1,8$.

(1) Scrivere questa lunghezza tramite un integrale.
(2) Calcolare una approssimazione della lunghezza usando il metodo di Simpson e $n = 4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

Svolgimento:

$$\text{lunghezza} = \int_1^{1,8} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_1^{1,8} \sqrt{1+4(\cos(2x))^2}\,dx$$

1 1,2 1,4 1,6 1,8

$$\Delta x = \frac{0,8}{4} = 0,2$$

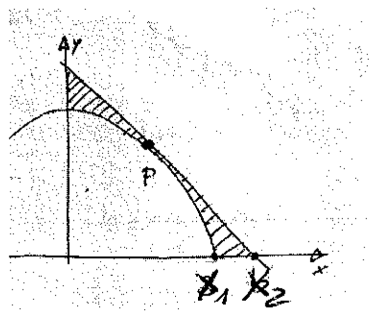
$$\int_1^{1,8} \sqrt{1+4(\cos(2x))^2}\,dx = \frac{\Delta x}{3}\Big(\sqrt{1+4(\cos(2))^2} + 4\sqrt{1+4(\cos(2,4))^2}$$

$$+ 2\sqrt{1+4\cdot(\cos(2,8))^2} + 4\sqrt{1+4\cdot(\cos(3,2))^2} + \sqrt{1+4(\cos(3,6))^2}\Big)$$

$$\approx \frac{0,2}{3}\big(1,301 + 4\cdot 1,7819 + 2\cdot 2,1333 + 4\cdot 2,233 + 2,0535\big)$$

$\approx 1,5787$

6)(6 punti) Considerate il punto $P=(1,6)$ della parabola $y=8-2x^2$. Calcolate l'equazione della retta tangente alla parabola in P e l'area ombreggiata in figura. (suggerimento: serve calcolare sia l'intersezione della retta con l'asse x, che l'intersezione della parabola con l'asse x, conviene spezzare il calcolo di una area in due parti)



Calcolo eq. retta tangente. Il coeff. angolare è uguale alla derivata di $8-2x^2$ in $x=1$, cioè a -4. Quindi eq. retta $y-6=-4(x-1)$ cioè $y=-4x+10$.

Calcolo x_1 e x_2 (vedi figura) x_1 = intersezione tra parabola e asse x $=2$ $\quad x_2$ = intersezione tra retta e asse x $=\frac{5}{2}$

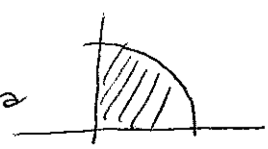
Allora area ombreggiata $=\int_0^2 (10-4x)-(8-2x^2)\,dx+\int_2^{5/2} 10-4x\,dx$

$$=\int_0^2 2-4x+2x^2\,dx+\int_2^{5/2} 10-4x\,dx = 2x\Big]_0^2-2x^2\Big]_0^2+\frac{2}{3}x^3\Big]_0^2$$

$$+10x\Big]_2^{5/2}-2x^2\Big]_2^{5/2}=(4-0)-(8-0)+\frac{2}{3}(8-0)$$

$$+10\left(\frac{5}{2}-2\right)-2\left(\frac{25}{4}-4\right)=4-8+\frac{16}{3}+5-\frac{9}{2}=$$

$$1+\frac{16}{3}-\frac{9}{2}=\frac{6+32-27}{6}=\frac{11}{6}$$

Altro metodo = area triangolo di base $\frac{5}{2}$ e altezza 10 − area 

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 10-\int_0^2 8-2x^2\,dx$

Prova scritta (6 crediti) del 19 Gennaio 2011

Risolvere (scrivendo lo svolgimento nello spazio corrispondente del compito da 12 crediti) gli esercizi 1 (3 punti), 2 (7 punti), 3 (8 punti), 6 (6 punti) del compito da 12 crediti e il seguente:

5') (7 punti) Dell'integrale

$$\int_3^4 \frac{1+x^5}{x}\,dx.$$

calcolare sia il valore esatto, tramite il metodo delle primitive, sia un valore approssimato tramite il metodo del trapezio e $n=5$.

COMPITO B

Nome: Corso di laurea: 6, 9 o 12 crediti?

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 17 Gennaio 2012

1) (4 punti) In Nicaragua l'inflazione è così alta che i prezzi crescono del 40% ogni anno.
a) Se un oggetto costa inizialmente 500 quanto costa dopo t anni?
b) Dopo quanti anni quell'oggetto costa 2000?
(attenzione: la crescita dei prezzi si compone).

Svolgimento:

a) $\text{costo}(t) = 500\left(1+\frac{40}{100}\right)^t$

b) si deve risolvere l'equaz.

$$500\cdot(1,4)^t = 2000$$

cioè $(1,4)^t = 4$ $\quad t = \log_{1,4} 4 = \frac{\ln 4}{\ln 1,4} \approx 4,12$

2) (6 punti) Ricercare il massimo e il minimo assoluto della funzione $\frac{3x}{9x^2+1} - 2$ quando x varia nell'intervallo $[-1, 1]$. Dire anche quali sono tutti i punti critici della funzione e se essi sono di massimo relativo, di minimo relativo o nessuno dei due.

Svolgimento:

Per lo svolgimento vedi il compito A

$$f' = \frac{3(9x^2+1) - 3x\,18x}{(9x^2+1)^2} = \frac{3-27x^2}{(9x^2+1)^2}$$

Quindi $f'=0$ se $x = \pm\frac{1}{3}$ e inoltre la decrescenza di f è

$-\frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{3}$

Allora $x=-\frac{1}{3}$ è un punto critico di min relativo mentre $x=\frac{1}{3}$ è di max relativo.

I candidati punti di max e min assoluti in $[-1,1]$ sono

$x=-1$ $\quad f(-1) = -2-\frac{3}{10} = -2,3$

$x=-\frac{1}{3}$ $\quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = -2-\frac{1}{2} = -2,5$ $\quad x=-\frac{1}{3}$ punto di min assoluto

$x=\frac{1}{3}$ $\quad f\left(\frac{1}{3}\right) = -2+\frac{1}{2} = -1,5 \leftarrow x=\frac{1}{3}$ punto di max assoluto

$x=1$ $\quad f(1) = -2+\frac{3}{10} = -1,7$

3) Sia $f(x) = (2x+1)e^{(-x^2)}$. La funzione ha come dominio $(-\infty, \infty)$ e inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(1) (1,5 punti) dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;

(2) (2,5 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;

(3) (3 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

(attenzione: una parte della funzione è composta)

a) segno di f = segno di $(2x+1)$

$-$ $\quad -\frac{1}{2} \quad$ $+$

b) $f' = -2e^{-x^2}(2x^2 + x - 1)$

punti critici $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$

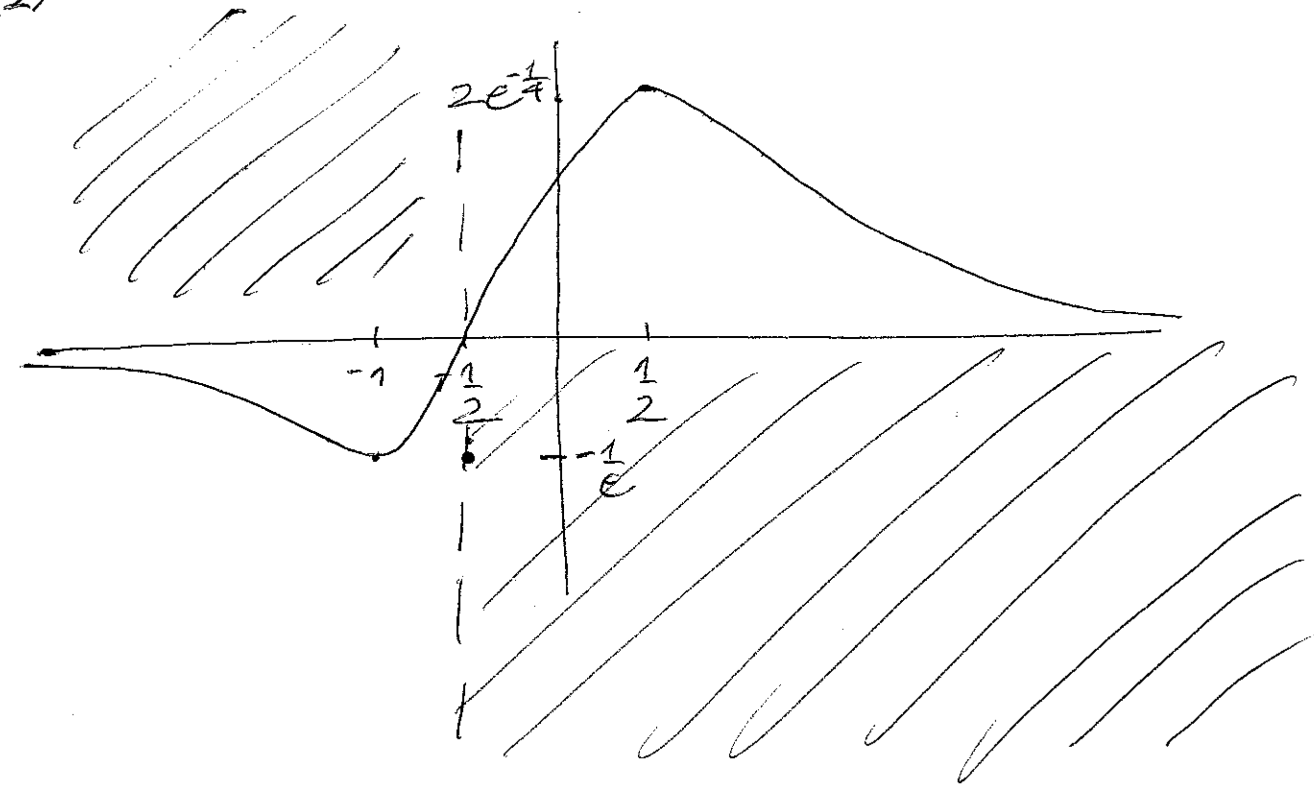
Crescenza

$\searrow \quad -1 \quad \nearrow \quad \frac{1}{2} \quad \searrow$

Calcolo di f nei punti critici

$f(-1) = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx 0{,}367$

$f(\frac{1}{2}) = 2e^{-\frac{1}{4}} \approx 1{,}558$



4) (4 punti) Un uomo alto 2 m cammina in direzione del palo di un lampione alla velocità di $0,5$ m/s. Se il lampione è posto ad una altezza di 5 m da terra con quale velocità diminuisce la lunghezza dell'ombra dell'uomo quando lui si trova ad una distanza di 3 m dal palo? (suggerimento: la lunghezza dell'ombra si calcola usando la similitudine di due triangoli: uno che ha il lampione come altezza e l'altro l'uomo come altezza)

Svolgimento:

vedi compito A

5) (6 punti) Si vuole calcolare la lunghezza del grafico di $\cos(2x)$ tra i suoi punti di ascissa $x = 0,5$ e $x = 2,1$.

(1) Scrivere questa lunghezza tramite un integrale.
(2) Calcolare una approssimazione della lunghezza usando il metodo di Simpson e $n = 4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

Svolgimento:

$$\text{Lunghezza} = \int_{0,5}^{2,1} \sqrt{1+(f')^2}\,dx = \int_{0,5}^{2,1} \sqrt{1+4(\text{sen}(2x))^2}\,dx$$

0,5 0,9 1,3 1,7 2,1

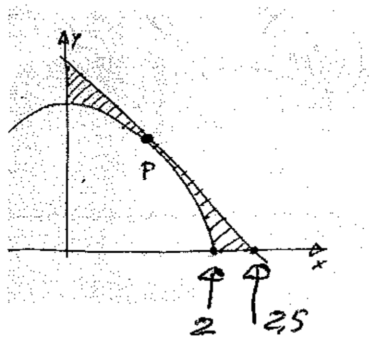
$$\Delta x = 0,4$$

$$\text{Lunghezza} \approx \frac{\Delta x}{3}\Big(\sqrt{1+4(\text{sen}\,1)^2} + 4\cdot\sqrt{1+4(\text{sen}\,1,8)^2} + 2\sqrt{1+4(\text{sen}\,2,6)^2} + 4\sqrt{1+4(\text{sen}\,3,4)^2} + \sqrt{1+4(\text{sen}\,4,1)^2}\Big)$$

$$= \frac{0,4}{3}\big(1,9576 + 4\cdot 2,1894 + 2\cdot 1,4363 + 4\cdot 1,123 + 2,0096\big)$$

$$= 2,6785$$

6)(6 punti) Considerate il punto $P = (1, 9)$ della parabola $y = 12 - 3x^2$. Calcolate l'equazione della retta tangente alla parabola in P e l'area ombreggiata in figura. (suggerimento: serve calcolare sia l'intersezione della retta con l'asse x, che l'intersezione della parabola con l'asse x, conviene spezzare il calcolo di una area in due parti)



Equazione retta tangente $y = 15 - 6x$

$$\text{Area} = \int_0^{2,5} (15 - 6x)\,dx - \int_0^2 (12 - 3x^2)\,dx$$

$$= \Big[15x - 3x^2\Big]_0^{5/2} - \Big[12x - x^3\Big]_0^2$$

$$= \left(15 \cdot \frac{5}{2} - 3 \cdot \frac{25}{4}\right) - 0 - \Big[(12 \cdot 2 - 8) - 0\Big]$$

$$= \left(\frac{75}{2} - \frac{75}{4}\right) - 16 = \frac{75}{4} - 16 = \frac{11}{4} = 2,75$$

L'area poteva essere calcolata anche come

$$\int_0^2 \text{retta} - \text{parabola} + \int_2^{2,5} \text{retta} - 0$$

Prova scritta (6 crediti) del 19 Gennaio 2011

Risolvere (scrivendo lo svolgimento nello spazio corrispondente del compito da 12 crediti) gli esercizi 1 (3 punti), 2 (7 punti), 3 (8 punti), 6 (6 punti) del compito da 12 crediti e il seguente:

5') (7 punti) Dell'integrale

$$\int_3^4 \frac{1 + x^5}{x}\,dx.$$

calcolare sia il valore esatto, tramite il metodo delle primitive, sia un valore approssimato tramite il metodo del trapezio e $n = 5$.

COMPITO C

Nome: Corso di laurea: 6, 9 o 12 crediti?

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 17 Gennaio 2012

1) (4 punti) In Nicaragua l'inflazione è così alta che i prezzi crescono del 5% ogni 10 giorni.

a) Se un oggetto costa inizialmente 500 quanto costa dopo t giorni?

b) Dopo quanti giorni quell'oggetto costa 1000?

(attenzione: la crescita dei prezzi si compone).

Svolgimento:

a) $\text{costo}(t) = 500 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{\frac{t}{10}}$

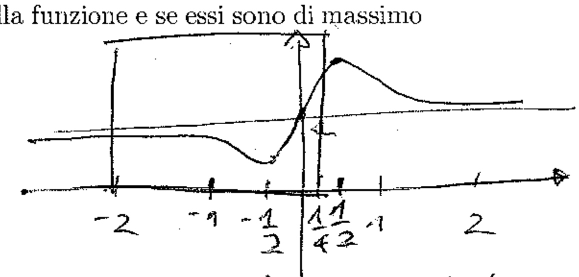
b) devo risolvere l'equazione $500 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{\frac{t}{10}} = 1000$

cioè $(1{,}05)^{\frac{t}{10}} = 2$

cioè $\frac{t}{10} = \log_{(1{,}05)} 2$

cioè $t = 10 \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 142{,}06$ giorni

2) (6 punti) Ricercare il massimo e il minimo assoluto della funzione $\frac{2x}{4x^2+1} + 1$ quando x varia nell'intervallo $[-2, \frac{1}{4}]$. Dire anche quali sono tutti i punti critici della funzione e se essi sono di massimo relativo, di minimo relativo o nessuno dei due.



Svolgimento:

$$f' = \frac{2(4x^2+1) - 2x \cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{2 - 8x^2}{(4x^2+1)^2}$$

punti critici $x = \frac{1}{2}$ che è max relativo e $x = -\frac{1}{2}$ che è min relativo

Per trovare max e min assoluto in $[-2, \frac{1}{4}]$ devo confrontare il valore di f nei punti

$x = -2$ $\quad f(-2) = 1 - \frac{4}{17}$

$x = -\frac{1}{2}$ $\quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}$ $\quad x = -\frac{1}{2}$ punto di min assoluto

$x = \frac{1}{4}$ $\quad f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{5}$ $\quad x = \frac{1}{4}$ punto di max assoluto

3) Sia $f(x) = (-4x+2)e^{(-x^2)}$. La funzione ha come dominio $(-\infty, \infty)$ e inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

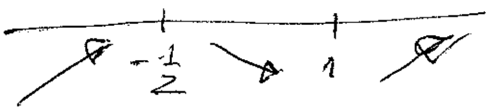
(1) (1,5 punti) dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;
(2) (2,5 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
(3) (3 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

(attenzione: una parte della funzione è composta)

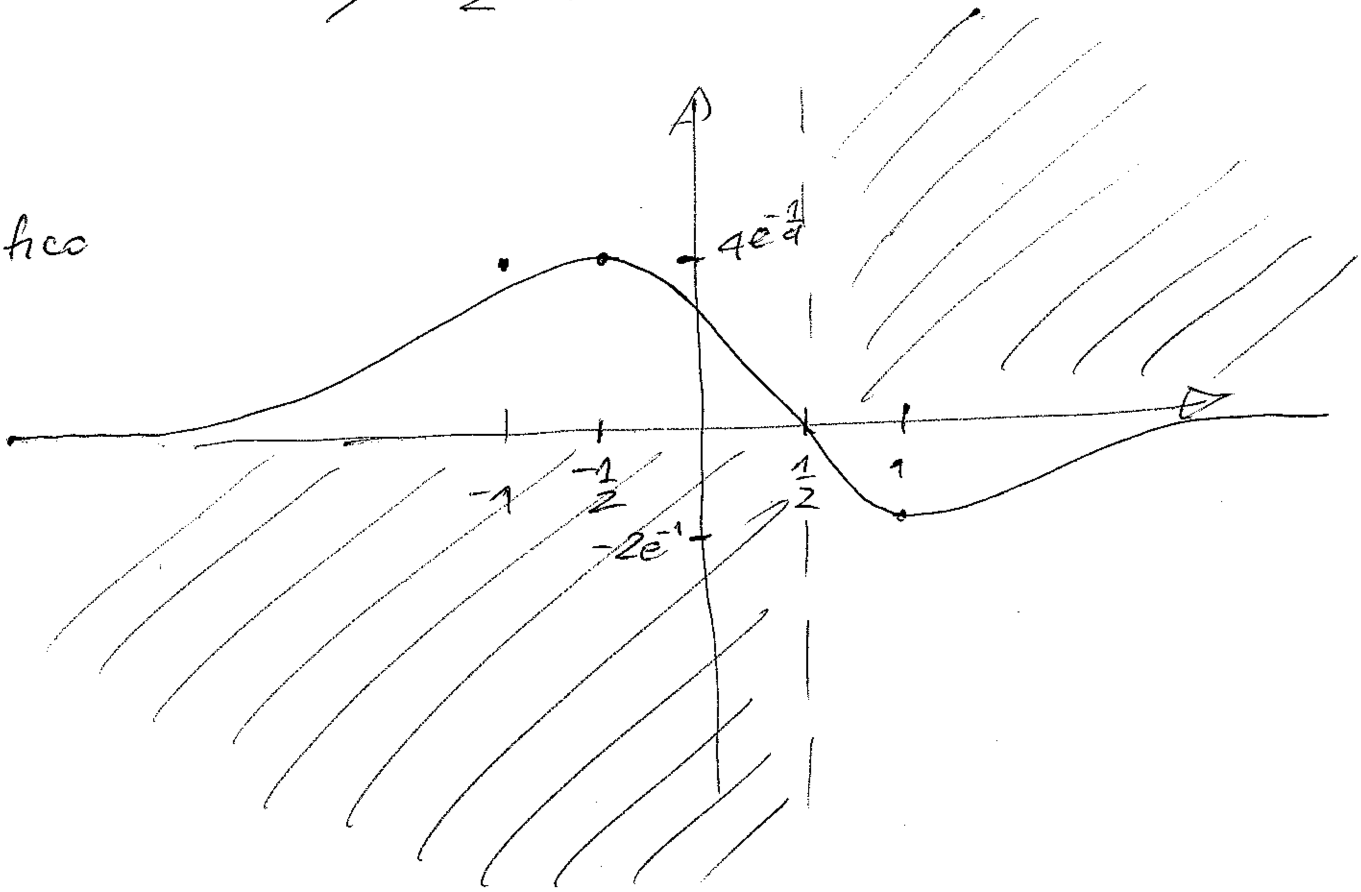
1) grafico interseca asse quando $f=0$ cioè $x = +\frac{1}{2}$
sta sopra asse x quando $f \geq 0$, cioè x $x \leq \frac{1}{2}$

2) $f'(x) = 4(2x^2 - x - 1)e^{-x^2}$
punti critici $x = -\frac{1}{2}$ $f(-\frac{1}{2}) = 4e^{-\frac{1}{4}} \approx 3.115$
$x = 1$ $f(1) = -2e^{-1} \approx -0,735$

crescenza



Grafico



4) (4 punti) Un uomo alto 2 m cammina in direzione del palo di un lampione alla velocità di 0,5 m/s. Se il lampione è posto ad una altezza di 5 m da terra con quale velocità diminuisce la lunghezza dell'ombra dell'uomo quando lui si trova ad una distanza di 3 m dal palo? (suggerimento: la lunghezza dell'ombra si calcola usando la similitudine di due triangoli: uno che ha il lampione come altezza e l'altro l'uomo come altezza)

Svolgimento:

Vedi compito A

5) (6 punti) Si vuole calcolare la lunghezza del grafico di $\sin(3x)$ tra i suoi punti di ascissa $x = 0,2$ e $x = 1,4$.

(1) Scrivere questa lunghezza tramite un integrale.

(2) Calcolare una approssimazione della lunghezza usando il metodo di Simpson e $n = 4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

Svolgimento:

a) $\text{lunghezza} = \int_{0,2}^{1,4} \sqrt{1 + [(\text{sen}(3x))']^2}\, dx = \int_{0,2}^{1,4} \sqrt{1 + 9(\cos(3x))^2}\, dx$

b) $\Delta x = \frac{1,4 - 0,2}{2} = 0,3$

0,2   0,5   0,8   1,1   1,4

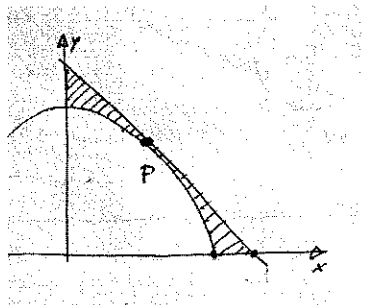
$\text{lunghezza} \approx \frac{\Delta x}{3}\Big(\sqrt{1+9\cos^2(3\cdot 0,2)} + 4\sqrt{1+9\cos^2(3\cdot 0,5)} +$

$+ 2\sqrt{1+9\cos^2(3\cdot 0,8)} + 4\sqrt{1+9\cos^2(3\cdot 1,1)} + \sqrt{1+9\cos^2(3\cdot 1,4)}\Big)$

$\approx \frac{0,3}{3}\left(2.670 + 4\cdot 1.022 + 2\ 2,427 + 4\ 3,1267 + 1,7785\right)$

$= 2,589$

6)(7 punti) Considerate il punto $P = (1, 12)$ della parabola $y = 16 - 4x^2$. Calcolate l'equazione della retta tangente alla parabola in P e l'area ombreggiata in figura. (suggerimento: serve calcolare sia l'intersezione della retta con l'asse x, che l'intersezione della parabola con l'asse x, conviene spezzare il calcolo di una area in due parti)



Eq. retta tangente . $m =$ derivata di $16-4x^2$ calcolata in $x = 1$ $= -8$

Inoltre passa per P. Quindi $y = 20 - 8x$

La parabola interseca asse x in $(2,0)$, la retta in $(2{,}5, 0)$

allora area tratteggiata = area triangolo − area sotto parabola e nel 1° quadrante

area triangolo $= \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 20 = 25$

area sotto parabola e nel 1° quadrante $= \int_0^2 16 - 4x^2\, dx =$

$$= \left[16x - \frac{4}{3}x^3\right]_0^2 = \left(16 \cdot 2 - \frac{4}{3} \cdot 8\right) - 0 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$$

allora area tratteggiata $= 25 - \frac{64}{3} = \frac{11}{3} \approx 3{,}\overline{6}$

Prova scritta (6 crediti) del 19 Gennaio 2011

Risolvere (scrivendo lo svolgimento nello spazio corrispondente del compito da 12 crediti) gli esercizi 1 (3 punti), 2 (7 punti), 3 (8 punti), 6 (6 punti) del compito da 12 crediti e il seguente:

5') (7 punti) Dell'integrale

$$\int_3^4 \frac{1 + x^5}{x}\, dx.$$

calcolare sia il valore esatto, tramite il metodo delle primitive, sia un valore approssimato tramite il metodo del trapezio e $n = 5$.