Nome: Corso di laurea: 9 o 12 crediti?

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 7 Febbraio 2012

1) (6 punti) Considerate la tabella seguente

X	Y
-1	-4
0,5	-7
2,2	-10

- Calcolate la media, la varianza e la deviazione standard dei dati X.
- Calcolate la formula per la regressione lineare dei dati Y in funzione dei dati X
- Calcolate il coefficiente R^2 e, sulla base di R^2, dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo lineare.

Svolgimento:

$\overline{X} = \frac{-1+0{,}5+2{,}2}{3} = 0{,}5\overline{6}$ $\quad \text{var}\, X = 1{,}70$ $\quad \text{dev st.}\, X = \sqrt{\text{var} X} = 1{,}307$

~~X Y X² Y² XY medie 0,56 varianza 1,70~~

	X	Y	X^2	Y^2	XY
medie	$1{,}5\overline{6}$	-7	2,03	55	$-7{,}1\overline{6}$
varianza	$1{,}70\overline{8}$	6			

$$m = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\text{Var}(X)} = 1{,}872 \qquad q = \overline{Y} - m\overline{X} = -5{,}93$$

$$R^2 = \frac{(\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y})^2}{\text{Var}(X)\,\text{Var}(Y)} = 0{,}998$$

Poiché $0{,}99 < R^2$ posso credere che la Y dipende in modo lineare dalla X

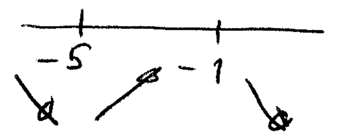
2) (7 punti) Trovare il valore massimo e minimo assoluto di $f(x) = -\frac{x}{3} - \ln(5+x^2)$ quando x varia nell'intervallo $[-4, 0]$.

Svolgimento: I candidati max-min sono $x=-4$, $x=0$ e gli eventuali punti critici di f in $[-4,0]$.

Calcolo f' $\quad f' = -\frac{1}{3} - \frac{2x}{5+x^2}$

$f' = 0 \iff \frac{-5-x^2-6x}{3(5+x^2)} = 0$ $\quad x=-5$, $x=-1$

monotonia



L'unico punto critico in $[-4,0]$ è $x=-1$

Confronto il valore di f nei candidati

$f(-4) = -1{,}711$
$f(-1) = -1{,}458$
$f(0) = -1{,}609$

Quindi $x=-4$ è il punto di min assoluto
$x=-1$ " " " " max ".

3) Sia $f(x) = e^{\frac{7x}{12}}\left(\frac{7}{x} - 1\right)$ La funzione ha come dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ e inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim x \to 0^+ f(x) = +\infty$ e $\lim x \to 0^- f(x) = -\infty$.

(1) (1,5 punti) dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;

(2) (3 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;

(3) (3,5 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

(attenzione: una parte della funzione è composta)

~~Segno~~ $f = 0 \iff \frac{7}{x} - 1 = 0 \iff \frac{7-x}{x} = 0 \implies x = 7$

segno di f

	$(-\infty,0)$	0	$(0,7)$	7	$(7,\infty)$
segno di $e^{\frac{7}{12}x}$ sempre >0	+		+		+
segno di $7-x$	+		+		−
segno di x	−		+		+
segno di f	−		+		−

$$f' = e^{\frac{7}{12}x}\left(\frac{7}{12}\right)\cdot\left(\frac{7}{x} - 1\right) + e^{\frac{7}{12}x}\cdot\left(-\frac{7}{x^2}\right)$$

$$= e^{\frac{7}{12}x}\left(\frac{49}{12x} - \frac{7}{12} - \frac{7}{x^2}\right) = 7e^{\frac{7}{12}x}\left(\frac{7x - x^2 - 12}{12x^2}\right)$$

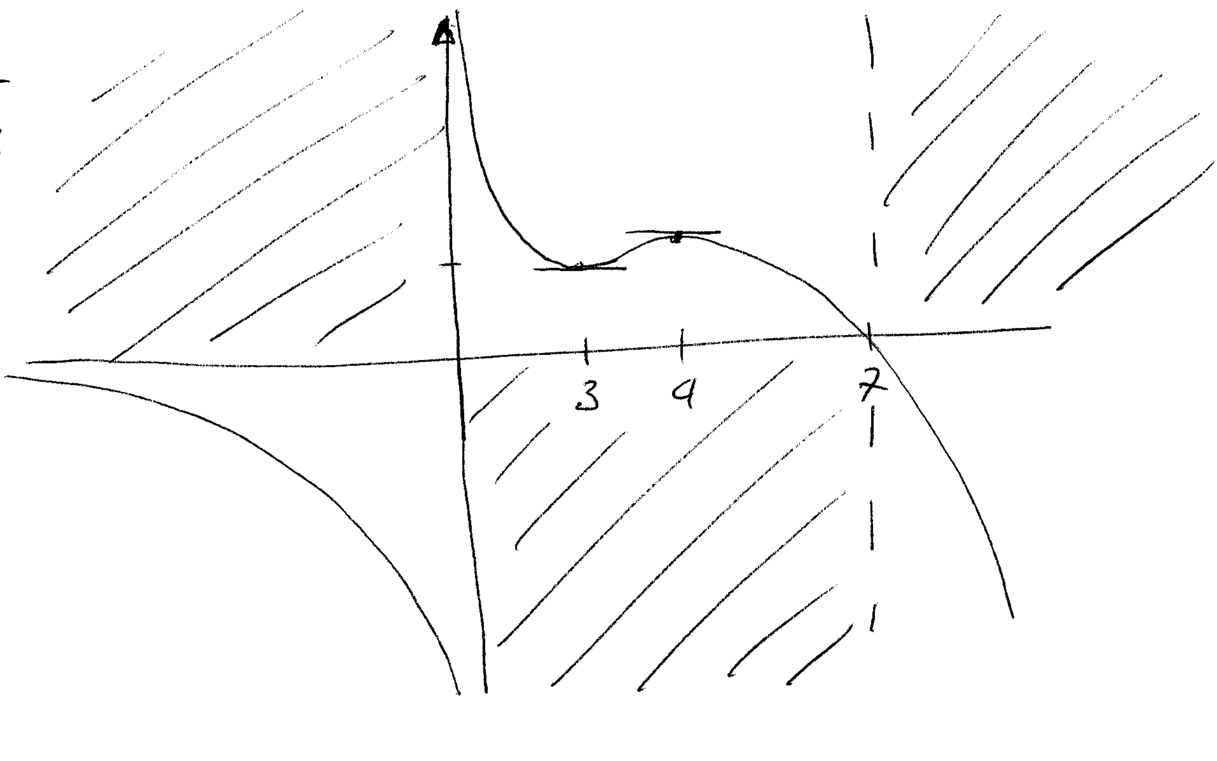
$f' = 0 \iff 7x - x^2 - 12 = 0 \iff x = 3$ o $x = 4$

segno di f'

	$(-\infty,3)$	3	$(3,4)$	4	$(4,\infty)$
segno di $e^{\frac{7}{12}x}$	+		+		+
segno di $7x - x^2 - 12$	−		+		−
segno di $12x^2$	+		+		+
segno di f'	−		+		−

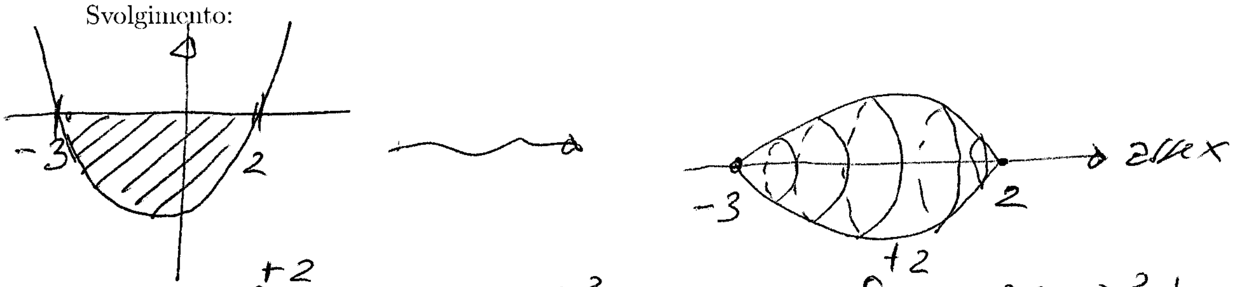
$f(+3) \approx 7,67$

$f(4) \approx 7,73$



4) (6 punti) Considerate la parte della parabola $y = 3(x+3)(x-2)$ che sta sopra l'asse x. Fare ruotare questa parte della parabola intorno all'asse x di un giro completo di 360^0. Ottenete un solido di rotazione che ha come asse l'asse x. Ne dovete calcolare il volume. Per far questo scrivete questo volume come un integrale e poi calcolate, con il metodo delle primitive, questo integrale.

Svolgimento:



$$\text{Volume} = \pi \int_{-3}^{+2} \left(3(x+3)(x-2)\right)^2 dx = 9\pi \int_{-3}^{+2} (x+3)^2(x-2)^2 dx$$

$$= 9\pi \int_{-3}^{+2} (x^2+9+6x)(x^2+4-4x)\, dx = 9\pi \int_{-3}^{+2} (x^4+2x^3-11x^2-12x+36)\, dx$$

$$= 9\pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{4}x^4 - \frac{11}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 36x \right]_{-3}^{+2} \approx 2945$$

5) (6 punti) Calcolate una approssimazione di $\int_1^3 \sqrt{4+\sin(x)}$ tramite il metodo del trapezio con $n = 6$.

Svolgimento:

$$\Delta x = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$$

$1 \quad 1+\frac{1}{3} \quad 1+\frac{2}{3} \quad 1+\frac{3}{3}=2 \quad 1+\frac{4}{3} \quad 1+\frac{5}{3} \quad 1+\frac{6}{3}=3$

$$\int_1^3 \sqrt{4+\operatorname{sen} x}\, dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(1) + 2f\left(\tfrac{4}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{5}{3}\right) + 2f(2) + 2f\left(\tfrac{7}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{8}{3}\right) + f\left(\tfrac{9}{3}\right)\right)$$

$$\approx \frac{1}{6}\left(2,20033 + 4,459 + 4,470 + 4,431 + 4,346 + 4,222 + 2,034\right)$$

$$\approx 4,361$$

Attenzione $\operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}\right)$ (come tutti gli altri valori del seno) va calcolato tenendo conto che $\frac{4}{3}$ è ~~la~~ misura in RADIANTI di un angolo.