A

Nome e cognome:

Prova scritta di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
23 Aprile 2016

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente a $y = x2^x$ in $(1, 2)$.

soluzione

$f'(x) = 2^x + x\,2^x \ln 2 \qquad f'(1) = 2 + 2\ln 2 \approx 3{,}38$

Eq. retta $\quad y - 2 = (2 + 2\ln 2)(x - 1)$

$y = (2 + 2\ln 2)x - 2\ln 2$

1b) (1,5 punti) Calcolare una primitiva $\frac{3}{1+x^2} + \sqrt{3} + \frac{1}{x^2}$.

soluzione

$3 \arctan(\cancel{x+}) + \sqrt{3} \cdot x - \frac{1}{x}$

1c) (1,5 punti) Calcolare media e varianza dei numeri $\{-3, 2, 16\}$.

soluzione

media $= \frac{-3+2+16}{3} = 5$

varianza $= \frac{(-3-5)^2 + (2-5)^2 + (16-5)^2}{3} = \frac{64+9+121}{3} = 64{,}\overline{6}$

1d) (1,5 punti)Studiare il segno di $\frac{4x}{3} + \frac{3}{x-3}$.

soluzione segno ≥ 0 in $(3, +\infty)$, segno ≤ 0 in $(-\infty, 3)$

$\frac{4x}{3} + \frac{3}{x-3}$ è uguale a $\frac{4x^2 - 12x + 9}{3(x-3)}$

		$3/2$		3	
segno di $4x^2-12x+9$	+		+		+
segno di $3(x-3)$	−		−		+
segno complessivo	−		−		+

2) (6 punti) Sia $f(x) = x + \dfrac{a^2}{x}$.

a) Nell'espressione di f fissate $a = 5$. Determinate il punto di minimo assoluto e il punto di massimo assoluto di $f(x)$ al variare di x nell'intervallo $[1, 4]$;
b) Fissate adesso $a = 1/2$ e ripetete l'esercizio;
c) Fissate adesso $a = 3$ e ripetete ancora l'esercizio;

caso $a = 5$: punto min assoluto: $x = 4$	punto max assoluto: $x = 1$
caso $a = 1/2$: punto min assoluto: $x = 1$	punto max assoluto: $x = 4$
caso $a = 3$: punto min assoluto: $x = 3$	punto max assoluto: $x = 1$

Svolgimento:

$\boxed{\text{Caso } a=5}$ $f(x) = x + \dfrac{25}{x}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{25}{x^2} = \dfrac{x^2-25}{x^2}$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm 5$ ignovo ambedue gli x perchè $\notin [1,4]$

segno di f': $+$ -5 $-$ 1 4 5 $+$
crescenza

Quindi f decresce in $[1,4]$

Allora il max assoluto è in $x = 1$ e il min in $x = 4$

$\boxed{\text{Caso } a=\tfrac{1}{2}}$ $f(x) = x + \dfrac{1}{4x}$ $f'(x) = \dfrac{4x^2-1}{x^2}$ e $f'=0 \iff x = \pm\frac{1}{2}$

segno di f': $+$ $-\frac{1}{2}$ $-$ $\frac{1}{2}$ $+$ 1 $+$ 4 $+$
Crescenza di f

. f è quindi crescente in $[1,4]$.

Quindi il max è in $x = 4$ e il min in $x = 1$

$\boxed{\text{Caso } a=3}$ $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ $f'(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$ e $f'=0 \iff x = \pm 3$

segno di f': $+$ -3 $-$ 1 $-$ 3 $+$ 4
Crescenza di f

. Quindi f decresce in $[1,3]$ e cresce in $[3,4]$. Calcolo $f(3)$, $f(1)$ e $f(4)$

$f(3) = 6$
$f(4) = 4 + \frac{9}{4} = 6{,}25$
$f(1) = 1 + 9 = 10$

Allora il min assoluto si ha in $x = 3$, il max assoluto in $x = 1$

3) (7 punti) Sia $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\,(x+2)$.

Il dominio di f è $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;

b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;

c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva	intervalli in cui è negativa
e x in cui f è zero	
derivata prima di f	
intervalli in cui f cresce	e in cui decresce
x in cui si annulla f' e valore di f in essi	

Svolgimento e grafico:

* Segno di f

		-2	
segno di $e^{\frac{1}{x}}$	+ +		+
segno di $x+2$	− −		+ +
segno di f	−		+

* Calcolo di f'. Inizio calcolando $\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'$. E' una f. composta e la sua derivata è $e^{\frac{1}{x}}\cdot$(derivata di $\frac{1}{x}$) cioè $-e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$.

Allora $f' = -e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}(x+2) + e^{\frac{1}{x}}\cdot 1 = e^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{x+2}{x^2}+1\right] = e^{\frac{1}{x}}\frac{[x^2-x-2]}{x^2}$

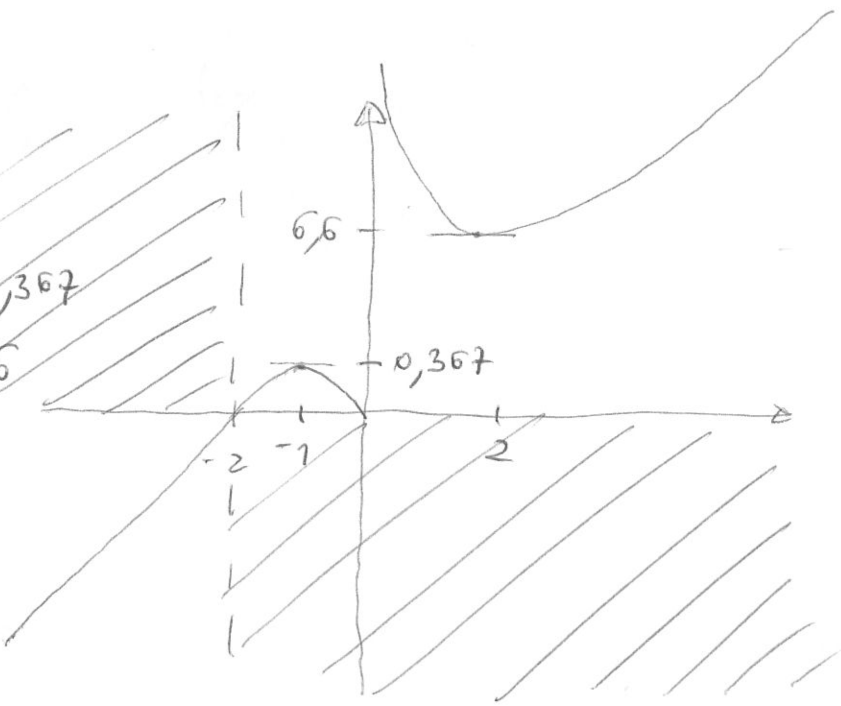
~~Segno~~ Punti in cui $f'=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

		-1		2	
segno di x^2-x-2	+		−		+
" " $e^{\frac{1}{x}}$	+		+		+
" " x^2	+		+		+
" " f'	+		−		+
Crescenza di f	↗	-1	↘	2	↗

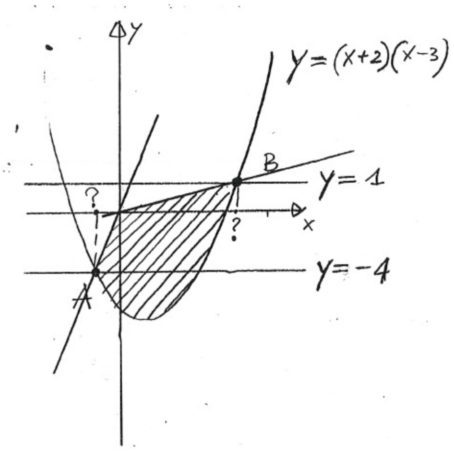
Calcolo di

$f(-1) = e^{-1}(-1+2) = +\frac{1}{e} \approx 0{,}367$

$f(2) = e^{\frac{1}{2}}(2+2) = 4\sqrt{e} \approx 6{,}6$



4) (6 punti) Il disegno sotto vi dà sufficienti informazioni per calcolare le coordinate di A e B, della retta per $(0;0)$ e A e della retta per $(0;0)$ e B. Vi dà inoltre l'equazione della parabola. Sulla base di queste informazioni calcolate l'area della regione tratteggiata in figura.



coordinate dei punti A e B:
equazione della retta per $(0;0)$ e A:
equazione della retta per $(0;0)$ e B:
scrivete l'area tramite uno o più integrali:
valore dell'area:

Svolgimento:

A : intersezione tra parabola e retta $y = -4 \Rightarrow A = (-1; -4)$
B : " " " " $y = 1 \Rightarrow B = \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; 1\right) \approx (3{,}19; 1)$

retta per A e (0,0) $m = 4$ & $y = 4x$
retta per B e (0,0) $m = \frac{2}{\sqrt{29}+1} \approx 0{,}313$ & $y = \frac{2}{\sqrt{29}+1}x$ o circa $y = 0{,}313x$

Impostazione area : $\cancel{\int_{-1}^{0} 4x - (x+2)(x-3)\,dx \quad \int_{-1}^{0} 5x + 6 - x^2\,dx}$

$$\int_{-1}^{0} 4x - (x+2)(x-3)\,dx + \int_{0}^{x_B} 0{,}313x - (x+2)(x-3)\,dx =$$

$$\int_{-1}^{0} 5x+6-x^2\,dx + \int_{0}^{3{,}19} 1{,}313x - 6 - x^2\,dx = \left[\frac{5}{2}x^2 + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1{,}313}{2}x^2 + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3{,}19}$$

$$= 0 - \left(\frac{5}{2} - 6 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1{,}313}{2}\cdot(3{,}19)^2 + 6\cdot 3{,}19 - \frac{(3{,}19)^3}{3}\right) - 0$$

$$\approx 3{,}1\overline{6} + 15{,}0 \approx 18{,}1\overline{6}$$

5) (7 punti) Considerate il grafico $y = x + \sin x$ e i due punti $A = (1; 1 + \sin 1)$ e $B = (2.6; 2.6 + \sin 2.6)$ di quel grafico.

a) Scrivete la **lunghezza** della parte del grafico di estremi A e B tramite un integrale;

b) Calcolate un valore approssimato **dell'integrale che esprime la lunghezza** usando il metodo dei punti medi con $n = 4$;

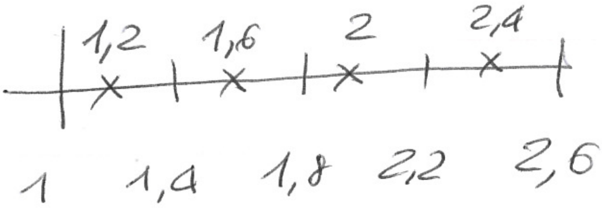
Integrale che esprime la lunghezza

Valore approssimato ottenuto

Svolgimento:

$$\text{lunghezza} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (\text{derivata})^2}\, dx = \int_1^{2,6} \sqrt{1 + (1+\cos x)^2}\, dx$$

$$\Delta x = \frac{2,6-1}{4} = 0,4$$



$$\int_1^{2,6} \sqrt{1+(1+\cos x)^2}\, dx \approx 0,4 \left(\sqrt{1+(1+\cos 1,2)^2} + \sqrt{1+(1+\cos 1,6)^2} + \sqrt{1+(1+\cos 2,2)^2} + \sqrt{1+(1+\cos 2,6)^2} \right) \approx$$

$$\approx 0,4 \left(1,69 + 1,3937 + 1,158 + 1,0339 \right)$$

$$= 0,4 (5,2756) = 2,11024$$

/ B

Nome e cognome:

Prova scritta di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
23 Aprile 2016

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente a $y = \frac{5^x}{x}$ in $(1, 5)$.

soluzione

$f'(x) = \frac{5^x \ln 5\, x - 5^x}{x^2} = \frac{5^x (x \ln 5 - 1)}{x^2}$

$f'(1) = 5(\ln 5 - 1) \approx 3{,}047$

Eq. retta $y - 5 = 5(\ln 5 - 1)(x-1)$ cioè $y = 5(\ln 5 - 1)x - 5\ln 5 + 10$

1b) (1,5 punti) Calcolare una primitiva $\frac{3}{(\cos x)^2} + \pi + \sqrt[3]{x}$. $y \approx 3{,}047x + 1{,}953$

soluzione

$3 \tan x + \pi x + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$

1c) (1,5 punti) Calcolare media e varianza dei numeri $\{-5, 6, 5\}$.

soluzione

media $= \frac{-5+6+5}{3} = 2$

Varianza $= \frac{(-5-2)^2 + (6-2)^2 + (5-2)^2}{3} = \frac{49+16+9}{3} = 24{,}\overline{6}$

media$(x^2) = \frac{25+36+25}{3} = \frac{86}{3}$

1d) (1,5 punti)Studiare il segno di $\frac{3x}{2} + \frac{2}{3x+4}$.

soluzione segno + se $x > -\frac{4}{3}$, segno − se $x < -\frac{4}{3}$

$\frac{3x}{2} + \frac{2}{3x+4}$ è uguale a $\frac{9x^2+12x+4}{2(3x+4)}$, cioè a $\frac{(3x+2)^2}{2(3x+4)}$

		$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
segno di $(3x+2)^2$	+	+	+
" " $2(3x+4)$	−	+	+
" " f	−	+	+

2) (6 punti) Sia $f(x) = \dfrac{e^{ax}}{x}$.

a) Nell'espressione di f fissate $a = 2$. Determinate il punto di minimo assoluto e il punto di massimo assoluto di $f(x)$ al variare di x nell'intervallo $[1, 2]$;
b) Fissate adesso $a = 2/3$ e ripetete l'esercizio;
c) Fissate adesso $a = 1/3$ e ripetete ancora l'esercizio;

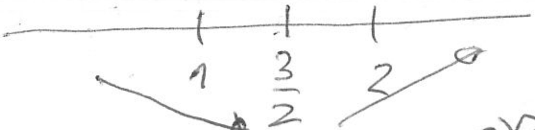
caso $a = 2$: punto min assoluto: $x=1$	punto max assoluto: $x=2$
caso $a = 2/3$: punto min assoluto: $x = 3/2$	punto max assoluto: $x = 1$
caso $a = 1/3$: punto min assoluto: $x = 2$	punto max assoluto: $x = 1$

Svolgimento:

$\boxed{\text{Caso } a=2}$ $\quad f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x} \qquad f'(x) = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

f' si annulla per $x = \frac{1}{2}$, che $\notin [1,2]$. Dallo studio del segno di f' si ha che $\underset{\frac{1}{2}}{\underline{f \text{ decrescente} \mid f \text{ crescente}}}$. Quindi f è crescente in $[1,2]$ e di conseguenza $x = 1$ è punto di min assoluto e $x = 2$ di max ass

$\boxed{\text{Caso } a = \frac{2}{3}}$. Adesso $f'(x) = \dfrac{e^{\frac{2}{3}x}\left(\frac{2}{3}x-1\right)}{x}$. f' si annulla in $x = \frac{3}{2}$, che $\in [1,2]$. Dal segno di f' si ha che

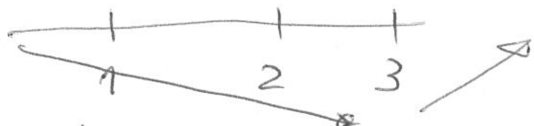


Confrontiamo $f(1)$ e $f(2)$: $\quad f(1) = \left(e^{\frac{2}{3}}\right) \approx 1{,}95 \qquad f(2) = \dfrac{e^{\frac{4}{3}}}{2} \approx 1{,}89$

Quindi $x = \frac{3}{2}$ min, $x = 1$ max

$\boxed{\text{Caso } a = \frac{1}{3}}$ $\quad f'$ si annulla in $x = 3$, fuori da $[1,2]$.

La crescenza di f è



Quindi f è decrescente in $[1,2]$ e quindi $x = 1$ è punto di max e $x = 2$ è punto di min

3) (7 punti) Sia $f(x) = \dfrac{(x^2-4)e^{x^2}}{2}$.

Il dominio di f è $(-\infty,+\infty)$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$	intervalli in cui è negativa $(-2,2)$
e x in cui f è zero $x=-2$, $x=2$	
derivata prima di f	
intervalli in cui f cresce $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$	e in cui decresce $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$
x in cui si annulla f' e valore di f in essi	

Svolgimento e grafico:

Segno di f

	-2		2	
segno di e^{x^2}	+	+	+	
" " x^2-4	+	−	+	
" " f	+	−	+	

Derivata. Calcoliamo prima $(e^{x^2})'$. E' una funzione composta e $(e^{x^2})' = e^{x^2}\cdot(x^2)' = 2xe^{x^2}$. Allora

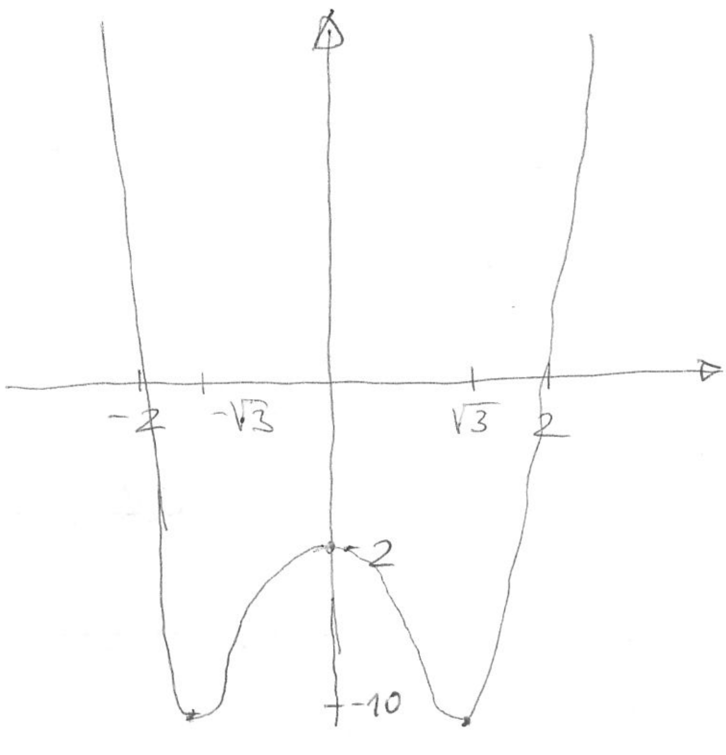
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[2xe^{x^2} + (x^2-4)2xe^{x^2}\right] = \frac{\cancel{2}xe^{x^2}}{\cancel{2}}\left[1+x^2-4\right] = e^{x^2}\cdot x(x^2-3)$$

Segno di e^{x^2}	+	+	+	+
" " x	−	−	+	+
" " x^2-3	+	−	−	+
" " f'	−	+	−	+
	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	

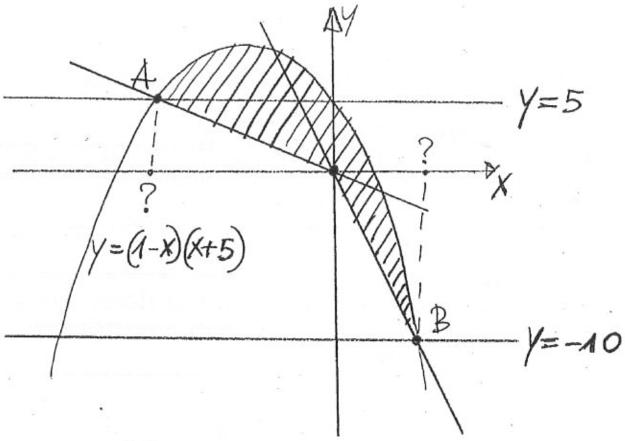
f' si annulla in $x=0$ e $x=\pm\sqrt{3}$

$f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = \dfrac{(3-4)e^3}{2} = \approx -10{,}04$

$f(0) = -2$



4) (6 punti) Il disegno sotto vi dà sufficienti informazioni per calcolare le coordinate di A e B, della retta per $(0;0)$ e A e della retta per $(0;0)$ e B. Vi dà inoltre l'equazione della parabola. Sulla base di queste informazioni calcolate l'area della regione tratteggiata in figura.



coordinate dei punti A e B:
equazione della retta per $(0;0)$ e A:
equazione della retta per $(0;0)$ e B:
scrivete l'area tramite uno o più integrali:
valore dell'area:

Svolgimento:

$A=(-4,5)$ $\quad B=(-1+\sqrt{19},-10)$ $\quad$ (Nota: $-2+\sqrt{19} \approx 2{,}36$

retta per A e $(0,0)$: $m=-\frac{5}{4}$ $\quad q=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{4}x$

" " B e $(0,0)$: $m=-\frac{10}{-2+\sqrt{19}}$ $\quad q=0 \Rightarrow y=\frac{10}{2-\sqrt{19}}x$

o $y=-4{,}24x$

$$\text{Area}=\int_{-4}^{0}(1-x)(x+5)+\frac{5}{4}x\,dx+\int_{0}^{-2+\sqrt{19}}(1-x)(x+5)-\left(\frac{10}{2-\sqrt{19}}x\right)dx$$

$$\approx\int_{-4}^{0}5-\frac{11}{4}x-x^2\,dx+\int_{0}^{2{,}36}5-4x-x^2+4{,}24x\,dx$$

$$=\left[5x-\frac{11}{8}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{0}+\left[5x+\frac{0{,}24x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2{,}36}=$$

$$0-\left(5(-4)-\frac{11}{8}(-4)^2-\frac{(-4)^3}{3}\right)+\left(5\cdot 2{,}36+0{,}12\cdot(2{,}36)^2-\frac{(2{,}36)^3}{3}\right)-0$$

$$\approx 20{,}\overline{6}+8{,}09\approx 28{,}75$$

5) (7 punti) Considerate il grafico $y = -1 + \cos x$ e i due punti $A = (-1; -1 + \cos(-1))$ e $B = (1.4; -1.4 + \cos 1.4)$ di quel grafico.

a) Scrivete la **lunghezza** della parte del grafico di estremi A e B tramite un integrale;

b) Calcolate un valore approssimato **dell'integrale che esprime la lunghezza** usando il metodo dei punti medi con $n = 4$;

Integrale che esprime la lunghezza

Valore approssimato ottenuto

Svolgimento:

$$\text{lunghezza} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+(\text{derivata})^2}\, dx = \int_{-1}^{1,4} \sqrt{1+(-\operatorname{sen} x)^2}\, dx$$

$$\Delta x = \frac{1,4-(-1)}{4} = \frac{2,4}{4} = 0,6$$

−0,7 0,1 0,5 1,1

−1 −0,4 0,2 0,8 1,4

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+(\operatorname{sen} x)^2}\, dx \approx 0,6 \cdot \left(\sqrt{1+(\operatorname{sen}(-0,7))^2} + \sqrt{1+(\operatorname{sen}(0,1))^2} + \sqrt{1+(\operatorname{sen} 0,5)^2} + \sqrt{1+(\operatorname{sen} 1,1)^2} \right) \approx$$

$$\approx 0,6 \left(1,1895 + 1,005 + 1,109 + 1,3395 \right)$$

$$= 0,6 \cdot 4,643$$

$$= 2,7858$$