ATTIVITA' PER LA COSTRUZIONE DELLA DEFINIZIONE RIGOROSA DI LIMITE

OBIETTIVI

La presente attività permette di tradurre la definizione intuitiva di limite

"Diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *se la funzione f assume valori vicini quanto si vuole a L tutte le volte che i valori di x sono sufficientemente vicini a* x_0 *(con eventuale esclusione del punto* $x=x_0$*)"*

nella definizione rigorosa in termini di intorni (o, equivalentemente, di strisce):

"Diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *se per ogni intorno U di L (per ogni striscia orizzontale centrata in L) esiste un intorno V di* x_0 *(esiste una striscia verticale centrata in* x_0*), dipendente da U, tale che per ogni* $x \in V$*, con* $x \neq x_0$*, risulta* $f(x) \in U$*".*

INDICAZIONI

Gli studenti si trovano a lavorare con una funzione non definita in $x = 2$ per la quale vale $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. I valori $x_0 = 2$ e $L = 4$ sono fissi; muovendo con il mouse i cursori corrispondenti, è possibile invece modificare le ampiezze degli intorni di L e x_0 (rappresentati rispettivamente dalla striscia orizzontale e dalla striscia verticale) e spostare il generico punto *x* (e di conseguenza il suo *f(x)*).

Nel punto 2 dell'attività gli studenti vengono invitati a familiarizzare con la striscia orizzontale, in modo da comprendere che essa rappresenta un intorno centrato in 4: si aiuta a far capire la relazione tra ε e gli estremi superiore e inferiore della striscia assegnando alcuni valori di ε e chiedendo di inserire in un'apposita tabella le ordinate dei punti.
In particolare, nel punto 2.d si guida a tradurre in termini rigorosi l'espressione "*f* assume valori vicini quanto si vuole a 4", assegnando alcuni valori di ε e facendo notare che qualunque sia l'ε considerato *f(x)* ricade sempre nella striscia orizzontale.

Nel punto 3 dell'attività si guida alla traduzione in termini rigorosi dell'espressione "tutte le volte che i valori di x sono sufficientemente vicini a 2 (con eventuale esclusione del punto $x = 2$)": assegnati alcuni valori di ε, viene chiesto agli studenti quali valori può assumere x affinché *f(x)* appartenga alla striscia orizzontale, aiutandoli a comprendere la dipendenza di δ da ε. I ragazzi vengono anche spinti a porre attenzione sul fatto che in x =2 la funzione non è definita e che questo non influisce sul limite.

L'ultimo punto dell'attività ha come scopo quello di far impratichire gli studenti con questo gioco di strisce: dati alcuni valori di ε, devono determinare un δ che soddisfi la definizione di limite; oppure, assegnati ε e δ, devono stabilire se la definizione è soddisfatta.

ATTENZIONE: è bene dividere l'attività in 3 parti, in modo da accompagnare gli studenti nella comprensione della definizione rigorosa. In corsivo sono quindi riportati esempi di interventi necessari per rendere più chiara la spiegazione.

NOTA: E' IMPORTANTE RISPONDERE ALLE DOMANDE NELL'ORDINE IN CUI SONO DATE

ATTIVITA'

Apri il file "def_rigorosa"

Parte 1

1. All'apertura del file ti trovi davanti una funzione *f(x)* non definita per $x = 2$.

   Osserva il grafico: quanto vale $\lim_{x \to 2} f(x)$?

   Vogliamo passare per gradi dalla definizione intuitiva a quella formale del limite per x che tende a 2 di *f(x)*.

2. Vediamo di interpretare quello che compare sullo schermo.
   a) In alto trovi uno slider blu denominato X : cliccando sullo slider e spostandolo a destra e a sinistra puoi spostare il punto x presente sull'asse delle ascisse. Prova a farlo.

Vedrai muoversi anche *f(x),* il valore che la funzione assume in *x*.

Sulla sinistra della schermata trovi i valori di *x* e *f(x)*.

b) Che cosa rappresenta *L* ?

c) In alto a sinistra trovi uno slider rosso denominato *ε:* clicca sullo slider e, spostandolo in alto e in basso, modifica il valore di *ε*. Che cosa puoi osservare quando aumenta *ε* ? E quando diminuisce?

Variando *ε*, cosa vedi muoversi e cosa invece rimanere fisso?

Cosa rappresenta dunque la striscia rosa? Prova ad aiutarti con qualche valore numerico. Poni *ε* = 3: qual è l'ordinata del punto azzurro sotto *L* e del punto azzurro sopra *L* ? E se *ε* = 2 ? E se *ε* = 1 ? Riporta i valori nella seguente tabella:

ε	**ordinata punto in basso**	**ordinata punto L**	**ordinata punto in alto**
3		4	
2		4	
1		4	

Osserva che cosa lega le ordinate dei punti azzurri all'ordinata di *L* e prova a dire cosa rappresenta la striscia rosa.

d) Rileggi la definizione intuitiva di limite: "*L* è il limite di *f(x)* per *x* che tende a x_0 se la funzione *f* assume valori <u>vicini quanto si vuole</u> a *L*…". Vogliamo capire cosa significa che i valori di *f(x)* sono vicini a *L*. Poni *ε* = 1: dove si trova *f(x)* quando dista da *L* meno di 1?

Poni *ε* = 0.8: dove si trova *f(x)* quando dista da *L* meno di 0.8?

Quindi, in cosa si traduce il fatto che *f(x)* è vicina a *L*?

In relazione alla striscia rosa, in cosa si traduce l'espressione "quanto si vuole?".

Ritengo importante interrompere l'attività in questo punto e riprenderla insieme agli studenti per assicurarsi che abbiano capito questo primo passaggio della definizione (altrimenti il rischio è che abbiano difficoltà con i punti successivi dell'attività).
Si può quindi sottolineare che la prima parte della definizione intuitiva ("la funzione f assume valori vicini quanto sia vuole a 4") può essere tradotta con "se qualunque sia l'intorno U di 4 (o, equivalentemente, qualunque sia la striscia rosa) $f(x) \in U$ ($f(x)$ sta dentro la striscia rosa). E' importante dare rilievo al fatto che possiamo prendere una striscia di ***ampiezza qualunque****.*

Parte 2

3. Vediamo adesso la seconda parte della definizione.

   a) Posto $\varepsilon = 1$, sposta il punto x : quale valore può assumere approssimativamente x affinché $f(x)$ appartenga alla striscia rosa? C'è un unico valore o più di uno?
   (Se ne hai bisogno, puoi aiutarti con i valori numerici indicati nella parte sinistra della schermata)

   E se $\varepsilon = 0.7$? Se $\varepsilon = 0.5$?

   Se ε continua a diminuire, riesci a trovare <u>sempre</u> un valore di x per cui $f(x)$ sta nella striscia rosa? Oppure esiste un valore di ε per cui $f(x)$ NON sta nella striscia?

   Cosa succede quindi alle x mano a mano che la striscia rosa si assottiglia?

   b) Secondo la definizione intuitiva, i valori di x devono essere <u>sufficientemente vicini</u> a x_0. Come abbiamo visto nel caso di $f(x)$, possiamo tradurre l'espressione "sufficientemente vicini" in termini di intorni: all'intorno di quale punto deve appartenere x affinché $f(x)$ sia contenuto nella striscia rosa?

   Tale intorno può essere scelto a piacere oppure dipende da qualche elemento della costruzione?

   c) Cosa succede se $x = x_0$?

Interrompiamo nuovamente l'attività e riprendiamola con gli studenti, chiarendo eventuali dubbi. Può essere inoltre necessario sottolineare con insistenza la ***dipendenza di δ da ε*** *e sottolineare che* ***ε deve essere fissato prima di δ****.*

La seconda parte della definizione intuitiva ("tutte le volte che i valori di x sono sufficientemente vicini a 2, con eventuale esclusione del punto x = 2") può essere sostituita con "tutte le volte che x appartiene ad un intorno V di 2 (o, equivalentemente, tutte le volte che x sta in una striscia verde) dipendente da U, con x≠ 2".

Riordinando le frasi e sostituendo le espressioni "qualunque sia l'intorno U" e "tutte le volte che x appartiene ad un intorno V" con le espressioni (in linguaggio più matematico) "per ogni intorno U" e "esiste un intorno V tale che per ogni x ∈ V" otteniamo la definizione rigorosa.

<u>*Parte 3*</u>

4. Poni ε = 0.8. Trova approssimativamente un valore di δ per cui qualunque x nella striscia verde ha il corrispondente *f(x)* nella striscia rosa.

   Fai la stessa cosa per ε = 0.6 e 0.4.

   Osserva ancora che l'intorno di 2 cambia al variare dell'intorno di 4.

   Posto ε = 0.5 e δ = 0.2, la definizione di limite risulta soddisfatta? Perché?

   E se δ = 0.08? E se δ = 0.04?