

Piccola guida all'uso del programma GRAPH

Che cosa e'?

E' un programma per disegnare grafici di funzioni e delle loro derivate, per calcolare integrali, trovare le soluzioni di una equazione o di un sistema di equazioni, trovare la linea di tendenza di una serie di dati e varie altre cose

Dove trovarlo e come installarlo

Graph e' un programma open-source completamente gratuito donato a tutti i suoi utenti dal suo creatore, Ivan Johansen. Lo potete scaricare dal sito <http://www.padowan.dk> sul vostro computer. Cio' che scaricate e' un file .exe auto installante, facendo partire il file Graph viene installato nella lingua che voi scegliete.

Help.

Il menu' Help contiene un Help in Italiano, che spiega il suo funzionamento, e anche un elenco delle funzioni matematiche disponibili, con la sintassi con cui immetterle.

Come si immette e si disegna il grafico di una funzione.

Accedere al menu' Funzione → Inserisci funzione. Si inserisce la formula della funzione usando gli stessi simboli usati in Excel per le operazioni (+ - * / ^ rispettivamente per somma, sottrazione, prodotto, divisione e elevamento a potenza). La funzione radice quadrata si inserisce come $\text{sqrt}(x)$, la radice cubica come $\text{root}(3,x)$, il logaritmo naturale come $\ln(x)$, il logaritmo in base 2 come $\text{logb}(x,2)$ eccetera, la funzione e^x puo' essere inserita o come e^x o come $\text{exp}(x)$. Come al solito attenti a mettere le parentesi giuste. Nella finestra si puo' specificare anche un intervallo in cui disegnare la funzione, se questo non viene specificato Graph disegna il grafico in tutto il dominio della funzione.

Il grafico viene disegnato, a meno che non specificate diversamente, nella finestra rettangolare x compresi tra -10 e 10, y compresi tra -10 e 10. Questa viene chiamata griglia standard, e potete tornare a questa griglia selezionando Zoom-> Standard. Potete cambiare questa scelta tramite il menu' Modifica → Assi. Notate che in quest'ultima finestra si puo' anche specificare di rappresentare le x (o le y) come multipli di pi greco, invece che di 1, e cio' e' utile se si studiano funzioni trigonometriche..

Iniziate disegnando il grafico di $f(x)=x*\cos(x)$ nella finestra standard.

Adesso provate a disegnare il grafico di $f(x)=x^2+15$. Come mai non vedete niente? Aggiustate la finestra. Suggerimento: x tra -10 e 10, y fra 0 e 30. Cosa succede se invece si mette y fra 0 e 3000? Insomma, per prima cosa si deve cercare di scegliere la finestra giusta per disegnare il grafico della nostra funzione.

Provate ancora con una finestra standard e $y=x^3-250*x$. Cercate adesso la finestra giusta. Suggerimento: finestra x tra -20 e 20, y tra -1600 e 1600.

Notate che deselezionando il segno di spunta accanto all'espressione della funzione nella colonna di sinistra il suo grafico scompare.

Come tutti i programmi per disegnare grafici, Graph ha vari difetti. Per approfondire questo punto leggete il paragrafo del primo capitolo del libro Stewart, Calcolo, dedicato a questi programmi.

Grafico di derivate

Eliminiamo tutti i grafici precedenti dallo schermo e disegniamo il grafico di $f(x)=x^4-5x^2-3$ nella finestra standard. Selezionate la sua formula nella colonna di sinistra e selezionate Funzione → Inserisci f. Vi compare una nuova funzione, $4x^3-10x$ che è la funzione derivata della funzione precedente. Notate che quando la derivata è positiva la funzione cresce, quando f' è negativa f decresce, quando f' è zero, f ha tangente orizzontale. Adesso selezionate la formula corrispondente a f' e ancora chiedete a Graph di disegnarvi la sua derivata. Ovviamente ottenete la derivata seconda f''. Anche in questo caso osservate che dove f'' è positiva f' è concava verso l'alto, dove f'' è negativa f' è concava verso il basso.

Adesso eliminate dallo schermo i grafici di f' e f'' e selezionate di nuovo la formula di f. Vogliamo disegnare la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x=-2$. Selezionate Funzione → Inserisci tangente/perpendicolare specificando $x=-2$ nella finestra che si ottiene. Ripetete per $x=1.58$.

Ripetete il disegno di f' e f'' per $x*\cos(x)$ e disegnatene la retta tangente in $x=\pi$ greco (π greco si indica con π) Notate che anche qui ottenete l'espressione **simbolica** della derivata, cioè ad esempio, $f'=\cos(x)-x*\sin(x)$

Un menu' molto importante: Calc → Valuta

a) Supponiamo che si voglia **risolvere l'equazione**

$$x^4-5x+3=0.$$

Cio' corrisponde a trovare le ascisse dei punti di intersezione del grafico di $f(x)=x^4-5x+3$ con l'asse x. Selezioniamo ancora la funzione $f(x)=x^4-5x+3$ nella colonna a sinistra. Poi selezioniamo il menu' Calc → Valuta e, nella finestra che si apre in basso a sinistra, selezioniamo dal menu' a tendina "asse x". Clicchiamo con il mouse vicino al punto di intersezione del grafico con l'asse x: appare una linea verticale in corrispondenza con il punto di intersezione e nella finestra in basso a sinistra appare il valore della x corrispondente. Ripetiamo per il secondo punto d'intersezione.

Esercizio: risolvere $2x^5-5x^3+2x^2+3x-2=0$

b) Supponiamo che adesso si voglia **risolvere il sistema**

$$y=9*\cos(x)$$

$$y=x$$

Cio' corrisponde a trovare le x e y delle intersezioni tra i due grafici corrispondenti. Disegniamo i due grafici in Graph, nella colonna di sinistra selezioniamo uno qualsiasi dei due e poi il menu' Calc → Valuta e selezioniamo "Intersezioni" nella finestra in basso a sinistra. Cliccando vicino a ciascuno dei 5 punti di intersezione si ottengono le corrispondenti x e y. Secondo voi ci sono altre

Esercizio: risolvere il sistema $y=1$ e $y=(x^2)*e^{(-x/2)}$

c) Supponiamo che si vogliono trovare tutti i punti di minimo o massimo relativo e anche i punti ed il valore massimo o minimo assoluto della funzione $y=x*\cos(x)$ nell'intervallo $[0,3*\pi]$. Per prima cosa e' conveniente disegnare il grafico di $x*\cos(x)$ solo per x nell'intervallo $[0,3\pi]$ (come fare e' stato spiegato prima). Adesso si seleziona la formula $y=x*\cos(x)$ nella colonna di sinistra, poi il menu' Calc \rightarrow Valuta e infine si seleziona "estremi" dal menu' a tendina. Anche in questo caso cliccando vicino a ciascun punto di massimo o minimo relativo si ottengono le corrispondenti x e y . In $[0,3\pi]$ ci sono due punti di massimo relativo, cioe' $x=0.86$ e $x=6.43$, ed un punto di minimo relativo, $x=3.42$. Per quanto riguarda il massimo assoluto esso e' ottenuto in $x=6.43$ e vale 6.36. Invece il minimo assoluto e' chiaramente ottenuto in $x=3*\pi$. Per calcolare il valore della funzione in $x=3*\pi$ scegliete, nel menu' a tendina della finestra in basso a sinistra, "funzione", e immettete 3π nella casella della x . Otterrete $f(x)=-9.4248$. Questo e' il valore di minimo assoluto.

Esercizio: ripetere per $f(x)=\sin(x^2)-(\sin(x))^2$ con x che varia tra -2.8 e 2.8 .

Calcolo di integrali.

Iniziamo con il calcolare il primo integrale che vi ho presentato a lezione, cioe'

$$\int_0^3 x^2 dx$$

che, vi ricordo, ho dimostrato essere $1/3$. Disegnate il grafico di x^2 , selezionatene la formula nella colonna di sinistra, e poi scegliete il menu' Calc \rightarrow Area, specificate i due estremi di integrazione e ottenete come risultato $1/3$.

Adesso provate da voi a calcolare $\int_0^2 x(x-1)(x-2) dx$. Otterrete zero, dato che l'area dell'insieme sotto il grafico di $y=x(x-1)(x-2)$ e sopra l'asse x e' uguale all'area dell'insieme sopra il grafico di $y=x(x-1)(x-2)$ e sotto l'asse x . Adesso calcolate $\int_{-10}^{10} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}} dx$. Otterrete 1.

Calcolo di aree.

Vogliamo calcolare l'area dell'insieme sotto la curva $y=\sin(x)$ e sopra la retta $y=0,5$ (questo insieme e' composto da infinite parti, una tra 0 e π , una tra 2π e 3π etc, a noi interessa solo la parte compresa tra 0 e π). Sappiamo che tale area puo' essere espressa come

$$\int_a^b \sin(x) dx - \int_a^b 0,5 dx$$

dove a e' l'ascissa del punto di intersezione tra le due curve compreso tra 0 e $\pi/2$ e b e' l'ascissa del punto di intersezione tra le due curve compreso tra $\pi/2$ e π .

Calcoliamo per prima cosa a e b , tramite la procedura descritta precedentemente. Si ottiene $a=0.52359878$ e $b=2.61799388$. Annotiamo tali numeri su un foglio. Calcoliamo tramite Graph

$\int_{0.52359878}^{2.61799388} x^2 dx$, ottenendo 1.7321. Annotiamo anche questo numero su un foglio. Calcoliamo adesso $\int_{0.52359878}^{2.61799388} 0,5 dx$, ottenendo 1.0472. Di conseguenza l'area cercata e' $1.7321-1.0472$.

Calcolate adesso l'area dell'insieme compreso tra le curve $y=e^x$ e $y=x+5$. Otterrete 24.0124-6.8827.

Calcolo di lunghezze di archi di grafici.

Calcolate adesso il perimetro dell'insieme di prima, quello compreso tra $y=\sin(x)$ e $y=0.5$. Selezioniamo la funzione $\sin(x)$ nella colonna di sinistra e poi il menu' Calc \rightarrow Lunghezza Curva. Immettiamo le ascisse dei due estremi dell'arco di curva, cioè $a=0.52359878$ e $b=2.61799388$ (che ci eravamo calcolati prima) e otteniamo lunghezza arco di curva sul grafico di $\sin(x)$ uguale a 2.3719. Ripetiamo per l'altro segmento sulla retta $y=0.5$ e otteniamo che e' lungo 2.0944. Il perimetro e' ovviamente la somma delle due lunghezze. Ripetete il calcolo per il perimetro dell'insieme compreso tra le curve $y=e^x$ e $y=x+5$. Otterrete $9.7864+11.5002$.

Regressione lineare e linee di tendenza.

Immettete una serie di dati, tramite il menu' Funzione \rightarrow Inserisci serie di punti. Ad esempio immettete le misure del salto in alto vincitore alle Olimpiadi svoltesi nel 900.

anno	salto asta (in m)
1900	3,3
1904	3,5
1908	3,71
1912	3,95
1920	4,09
1924	3,95
1928	4,2
1932	4,31
1936	4,35
1948	4,3
1952	4,55
1956	4,56
1960	4,7
1964	5,1
1968	5,4
1972	5,5
1976	5,5
1980	5,78
1984	5,75
1988	6,03
1992	5,8
1996	5,92

Selezionate nella colonna di sinistra la corrispondente serie di dati e scegliete il menu' Funzione \rightarrow Inserisci linea di Tendenza, selezionando poi "lineare" nella finestra che si apre. Il programma disegnera' la linea di regressione lineare e, in alto a destra, ne mostrera' l'equazione e anche il quadrato del coefficiente di Pearson (indicato come R^2).

Ripetere con un'altra serie di dati a vostra scelta. Ad esempio provate una regressione esponenziale con la serie di dati della popolazione mondiale

anno	popolazione mondiale
1900	1.650.000.000

1910	1.750.000.000
1920	1.860.000.000
1930	2.070.000.000
1940	2.300.000.000
1950	2.560.000.000
1960	3.040.000.000
1970	3.710.000.000
1980	4.450.000.000
1990	5.280.000.000
2000	6.070.000.000

Gabriele Bianchi, 22 gennaio 2009

P.S. Saro' grato a chiunque mi indichi, ad esempio tramite una email a gabriele.bianchi@unifi.it, gli errori di grammatica, ortografia o matematica che questo testo certamente contiene.