Corso di Matematica e Laboratorio
Alcuni aspetti della teoria dell'integrazione

Gabriele Bianchi

Dipartimento di Matematica, Viale Morgagni 67/A, Firenze
E-mail address: gabriele.bianchi@unifi.it

C.d.S. in Viticoltura ed Enologia
Università di Firenze
a.a. 2017/18
Versione del 4 Gennaio 2018.

CAPITOLO 1

Alcuni aspetti della teoria dell'integrazione

Ho raccolto in queste pagine alcune spiegazioni di aspetti della teoria dell'integrazione che non sono presenti nel libro di testo e che per me sono particolarmente importanti. Questo capitolo non sostituisce ma affianca il capitolo sugli integrali del libro di testo. Più precisamente, oltre al materiale di questo capitolo vi e' richiesto di studiare anche i paragrafi 8.2 (eccetto il teorema indicato dal libro come *primo teorema fondamentale del calcolo*), 8.3 e 8.7 del vostro libro di testo. (Questi numeri si riferiscono alla terza edizione del libro.)

Mi scuso in anticipo per tutti gli errori che queste pagine sicuramente contengono e ringrazio in anticipo chi mi informerà di quelli trovati.

1. Cosa è l'integrale e perché è nato

In queste pagine vorrei spiegare le motivazioni che hanno portato a introdurre il concetto matematico chiamato integrale. Mostrerò che ci sono varie operazioni, in campi diversi delle scienze, che hanno forti caratteristiche in comune: l'astrarre e il vedere queste operazioni sotto la stessa luce ha portato a questo concetto.

1.1. Area. Il concetto di area non è ovvio come sembra. Fino a che si parla di insiemi A il cui contorno è fatto da un numero finito di segmenti non ci sono problemi né a definire cosa si intende per area né a calcolarla. Basta ad esempio scomporre l'insieme A nella unione di triangoli che si sovrappongono al massimo sui lati e l'area di A non è nient'altro che la somma delle aree di questi triangoli.

Se qualche pezzo della frontiera di A è curva, ad esempio è un arco di parabola, già il calcolo dell'area smette di essere scontato. Se poi A diventa ancora più strano non solo il calcolare l'area diventa non scontato, ma nasce anche la difficoltà di immaginare che cosa possa essere l'area di un tale insieme. Come esempio considerate il quadrato $Q = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ e da Q levate tutti i punti del piano che hanno ascissa (cioè coordinata x) razionale. Cosi' levate da Q tutti i punti della retta verticale $x = 1/2$, e poi anche tutti i punti delle rette $x = 1/3$ e $x = 2/3$, e poi tutti quelli delle rette $x = 1/4$ e $x = 2/4$, $x = 3/4$ e quelli delle rette $x = 1/5$ e $x = 2/5$, $x = 3/5$ e $x = 4/5$, e cosi' via levando in un processo infinito. Quello che vi rimane è un insieme difficile da immaginare. Che cosa è l'area di quell'insieme, e quanto misura?

In questo corso non affronteremo questi insiemi *mostruosi*, ma ci limiteremo a trattare il calcolo dell'area di insiemi più semplici. Il nostro primo esempio è l'insieme $B = \{(x, y) : x \in [0, 1], 0 \le y \le x^2\}$ (vedi Fig. 1), cioè l'insieme limitato dal segmento di estremi $(0, 0)$ e $(0, 1)$, dal segmento di estremi $(0, 1)$ e $(1, 1)$ e infine

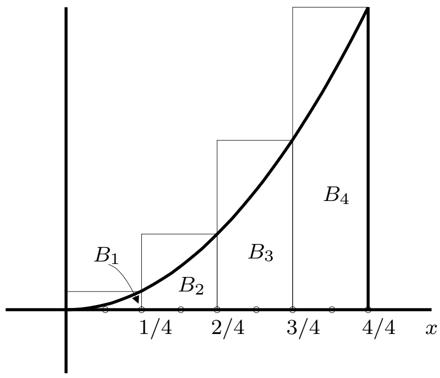

FIGURA 1. L'insieme B e i rettangoli che ne approssimano l'area quando $n = 4$

da un arco contenuto nella parabola $y = x^2$. Mostrerò come si possa calcolare un approssimazione della sua area, con una precisione buona quanto si vuole (a patto di fare sempre più calcoli). Questa approssimazione dipende da un parametro, che è un numero intero positivo n. Per iniziare fissiamo questo parametro $n = 4$. Dividiamo il segmento di base di A in 4 parti uguali. Le coordinate x degli estremi di tali suddivisioni sono 0, 1/4, 2/4, 3/4 e 1. Anche B viene diviso in 4 parti, una parte è quella contenuta nella striscia verticale $\{(x, y) : x \in [3/4, 1]\}$ (e la chiamo B_4), un'altra quella contenuta in $\{(x, y) : x \in [2/4, 3/4]\}$ (e la chiamo B_3) e così via. Approssimo B_4 con un rettangolo che ha la base coincidente con il segmento contenuto sull'asse x e di estremi $x = 3/4$ e $x = 4/4$ e due lati verticali. Devo ancora definire quale sia il lato superiore di questo rettangolo. Posso sceglierlo in tanti modi diversi, più o meno alto. Come esempio decido di sceglierlo ad una altezza uguale al valore della funzione $y = x^2$ nell'estremo destro dell'intervallo $[3/4, 1]$. Scelgo il segmento quindi ad altezza $y = (1)^2 = 1$. Analogamente approssimo B_3 con un rettangolo che ha la base coincidente con il segmento contenuto sull'asse x e di estremi $x = 2/4$ e $x = 3/4$, due lati verticali e il quarto lato ad altezza $y = (3/4)^2$, cioè $y = 9/16$. Ripeto lo stesso per B_1 e per B_2. L'area di B la posso allora approssimare tramite la somma delle aree dei quattro rettangoli e ottengo quindi ($\approx$ indica essere approssimativamente uguale a)

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(B) &\approx \operatorname{area}(B_1) + \operatorname{area}(B_2) + \operatorname{area}(B_3) + \operatorname{area}(B_4)\\ &= \frac{1}{4}\,\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\,\frac{4}{16} + \frac{1}{4}\,\frac{9}{16} + \frac{1}{4}\,\frac{16}{16}\\ &= 0,46875.\end{aligned}$$

Questa è una approssimazione che può essere migliorata aumentando il parametro n. Ad esempio scegliere $n = 8$ vuol dire dividere l'intervallo in 8 parti uguali e approssimare ognuna delle 8 parti in cui viene diviso l'insieme analogamente a

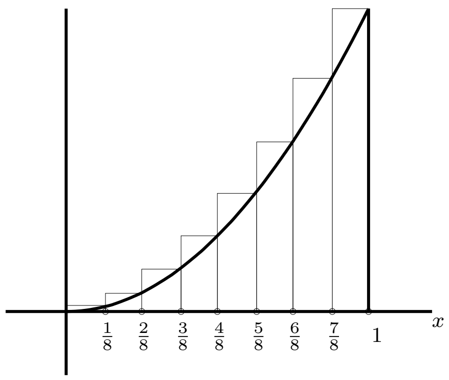

FIGURA 2. L'insieme B e i rettangoli che ne approssimano l'area quando $n = 8$

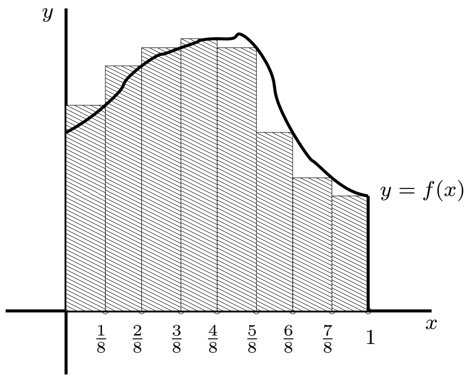

FIGURA 3. Le idee precedenti applicate all'insieme C.

quanto fatto sopra (vedi Fig. 2). Ottengo

$$\begin{aligned}\text{area}(B) \approx &= \frac{1}{8}\,\frac{1}{64} + \frac{1}{8}\,\frac{4}{64} + \frac{1}{8}\,\frac{9}{64} + \frac{1}{8}\,\frac{16}{64} + \frac{1}{8}\,\frac{25}{64} + \frac{1}{8}\,\frac{36}{64} + \frac{1}{8}\,\frac{49}{64} + \frac{1}{8}\,\frac{64}{64} \\ &= 0,398437.\end{aligned}$$

Vedremo nel seguito che l'area esatta di B è $1/3$.

Se avessimo applicato le stesse idee ad un insieme C della forma $\{(x, y) : x \in [0, 1], 0 \le y \le f(x)\}$ (vedi Fig. 3), dove f è una funzione positiva avremmo ottenuto, se avessimo scelto ancora $n = 8$,

$$\begin{aligned}\text{(1)} \quad \text{area}(C) \approx \frac{1}{8}\, f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8}\, f\left(\frac{2}{8}\right) + \frac{1}{8}\, f\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{8}\, f\left(\frac{4}{8}\right) + \\ + \frac{1}{8}\, f\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{1}{8}\, f\left(\frac{6}{8}\right) + \frac{1}{8}\, f\left(\frac{7}{8}\right) + \frac{1}{8}\, f\left(\frac{8}{8}\right),\end{aligned}$$

perché gli 8 rettangoli hanno tutti base $1/8$ e altezze rispettivamente $f(1/8)$ il primo, $f(2/8)$ il secondo e così via.

Una somma come quella in (1) si chiama *somma di Riemann.* E' la somma di n termini in cui ognuno di essi è il prodotto dell'ampiezza dell'intervallino moltiplicato per il valore della funzione in un punto del corrispondente intervallino. *Questo tipo di somma sta alla base dell'integrale* e (parlando un po' imprecisamente) l'integrale compare ogni volta che compare una somma di Riemann.

1.2. Calcolo dello spostamento a partire dalla velocità. Supponiamo adesso che ci sia una macchina che si sposta sull'asse x in un certo intervallo di tempo, diciamo $0 \leq t \leq 30$ secondi, e supponiamo di conoscerne la velocità. Riusciamo a calcolare di quanto si è spostata la macchina in questi 30 secondi? Se la velocità è costante la risposta è immediata:

$$\text{spostamento=velocità} \times \text{tempo.}$$

E se invece la velocità varia? Indichiamo con $v(t)$ la funzione che esprime la velocità. Supponiamo di conoscerne i valori per alcuni tempi come nella tabella

(2)

tempo (in s)	0	5	10	15	20	25	30
$v(t)$ (in m/s)	31	25	15	5	-8	-12	-10

Qui una velocità negativa significa una velocità nel verso decrescente dell'asse x. Per calcolare un valore approssimato dello spostamento possiamo ragionare così. Non conosco la velocità in tutti i primi 5 secondi ma posso ragionevolmente supporre che in ogni $0 \leq t \leq 5$ essa sia non troppo diversa dalla velocità nell'istante iniziale $t = 0$, cioè 31. In quei primi 5 secondi la macchina si è quindi spostata in avanti di circa

$$5 \times 31\ m.$$

Ragionando analogamente si capisce che tra $t = 5$ e $t = 10$ la macchina si e' spostata in avanti di circa 5×25 metri. Tra $t = 20$ e $t = 25$ si è spostato all'indietro di circa 5×8 metri. Complessivamente

$$\text{spostamento} \approx 5 \times 31 + 5 \times 25 + 5 \times 15 + 5 \times 5 + 5 \times (-8) + 5 \times (-12).$$

Possiamo scrivere questa formula usando la notazione $v(t)$ ottenendo

$$\text{(3)}\quad \text{spostamento} \approx 5 \times v(0) + 5 \times v(5) + 5 \times v(10) + 5 \times v(15) + 5 \times v(20) + 5 \times v(25).$$

Abbiamo ancora una una somma di Riemann, questa volta per la funzione $v(t)$ nell'intervallo $[0, 30]$. Un paio di osservazioni. Se si considera il grafico della funzione $v(t)$ quando $0 \leq t \leq 30$ si capisce che la somma di Riemann in (3) coincide con *la somma delle aree dei 4 rettangoli che stanno sopra l'asse t a cui vengono poi sottratte le aree dei 2 rettangoli sotto l'asse t.* Di conseguenza anche l'approssimazione dello spostamento data in (3) può essere interpretata come l'approssimazione dell'area compresa tra il grafico di $y = v(t)$ e l'asse t dove però l'area sopra l'asse t va sommata (va contata con il segno +) mentre quella sotto l'asse t va sottratta (va contata con il segno $-$).

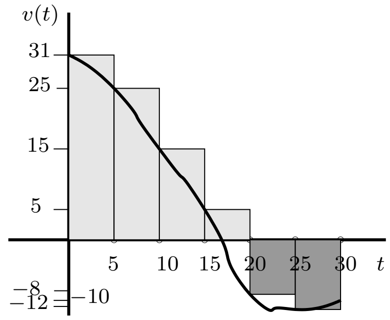

FIGURA 4. La funzione velocità $v(t)$: l'area dei rettangoli chiari viene sommata, quella dei rettangoli scuri viene sottratta.

1.3. Calcolo della quantità di acqua passata attraverso un tubo conoscendo la portata. Supponiamo adesso che voi abbiate un tubo, la cui estremità è immersa in un recipiente. Voi avete uno strumento che misura la portata dell'acqua che esce dal tubo. Questo tubo è fatto in modo che non solo può immettere acqua nel recipiente ma può anche aspirarla e si userà la convenzione che la portata è positiva se l'acqua fuoriesce dal tubo ed entra nel recipiente, ed è invece negativa se l'acqua viene aspirata dal recipiente ed entra nel tubo. Da questi dati volete calcolare di quanto è cambiato il volume dell'acqua nel recipiente. Anche in questo caso se la portata è costante è facile dare una risposta

$$\text{cambiamento del volume di acqua nel recipiente}=\text{portata} \times \text{tempo},$$

mentre il caso non banale è quello in cui la portata varia con il tempo. Supponete, per semplicità, che le misurazioni della portata siano uguali a quelle della tabella (2). Cioè che esse vengano fatte ogni 5 secondi tra $t = 0$ e $t = 30$ e che adesso la seconda riga di quella tabella non rappresenti la velocità ma la funzione portata $p(t)$, misurata in litri/sec. Possiamo ragionare esattamente come prima e ottenere una approssimazione del volume cercato

$$\text{cambiamento del volume di acqua nel recipiente} \approx$$
$$\approx 5 \times 31 + 5 \times 25 + 5 \times 15 + 5 \times 5 + 5 \times (-8) + 5 \times (-12).$$

cioè

$$\text{cambiamento del volume di acqua nel recipiente} \approx$$
$$\approx 5 \times p(0) + 5 \times p(5) + 5 \times p(10) + 5 \times p(15) + 5 \times p(20) + 5 \times p(25).$$

Abbiamo ancora una somma di Riemann, questa volta per la funzione $p(t)$ in $[0, 30]$.

1.4. Da un risultato approssimato al risultato esatto. Le somme di Riemann viste nei tre esempi precedenti danno in generale solo un risultato approssimato, non un risultato esatto. Aumentare il numero n di parti in cui si suddivide l'intervallo (e quindi il numero di termini nella somma) migliora la precisione ma in genere non da ancora il risultato esatto. Per avere il risultato esatto bisogna prendere il valore del limite delle somme di Riemann al tendere di n all'infinito. Più informalmente far diventare n arbitrariamente grande e trovare il numero al quale le somme di Riemann si avvicinano sempre di più quando n diventa arbitrariamente grande.

Vediamo in concreto questo processo nel caso del calcolo dell'area dell'insieme B definito nella sottosezione (1.1).

Sia n un intero positivo arbitrario e dividiamo $[0,1]$ in n parti uguali. Chiamiamo $x_0 = 0$, $x_n = 1$ e $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ gli estremi della suddivisione. Ogni intervallo ha ampiezza $1/n$, il punto x_1 lo ottengo spostandomi a destra di $x_0 = 0$ di $1/n$ ed ha quindi coordinata $1/n$. Il punto x_2 lo ottengo spostandomi a destra di x_1 di $1/n$ ed ha quindi coordinata $2/n$. Analogamente la coordinata di x_i è i/n. Ogni rettangolo approssimante ha base $1/n$. Scelgo le altezze di questi rettangoli uguali al valore di $y = x^2$ nell'estremo destro dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. Quindi il primo rettangolo ha altezza uguale al valore di $y = x^2$ in x_1, cioè altezza $(1/n)^2$. Il secondo ha altezza uguale al valore di $y = x^2$ in x_2, cioè altezza $(2/n)^2$ e così via. L'ultimo ha altezza $(n/n)^2$ (che è ovviamente 1, ma mi è comodo scriverlo cosi'.) Allora l'approssimazione dell'area che ottengo dividendo $[0,1]$ in n parti e scegliendo i rettangoli approssimanti come descritto sopra è

$$\text{area}(B) \approx \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2. \tag{4}$$

Posso riscrivere questa formula anche come

$$\text{area}(B) \approx \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\right). \tag{5}$$

Per procedere nel calcolo mi serve una formula, che qui richiamo senza darne una dimostrazione: la somma dei quadrati dei primi n numeri interi positivi è uguale a

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{6}$$

Sostituendo (6) in (5) ottengo

$$\text{area}(B) \approx \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}. \tag{7}$$

Se si calcola questa espressione per valori sempre più grandi di n si vede che essa diventa sempre più vicina ad $1/3$

n	10	10^2	10^3	10^5
approssimazione dell'area data da (7)	0,385	0,3434	0,3338335	0,333383335

e si può dimostrare rigorosamente che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Questo dimostra che l'area *esatta* di B è uguale ad $1/3$.

La scelta delle altezze dei rettangoli approssimanti che abbiamo fatto non è l'unica possibile. Ad esempio se avessimo scelto l'altezza dell'i-mo rettangolo come il valore di $y = x^2$ nell'estremo sinistro dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ (invece che nel destro), il primo rettangolo avrebbe avuto altezza x_0^2, cioè 0, il secondo x_1^2, cioè $(1/n)^2$, il terzo $(2/n)^2$, l'ultimo $((n-1)/n)^2$. Con calcoli simili ai precedenti avremmo ottenuto

$$\text{area}(B) \approx \frac{1}{n}(0)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

che è uguale a

$$\text{area}(B) \approx \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}.$$

Per un singolo n l'approssimazione che otteniamo è diversa da quella precedente, ma il limite per n che tende a $+\infty$ è ancora $1/3$.

1.5. Definizione di integrale. Arriviamo adesso alla definizione esatta di integrale.

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Sia n un intero positivo, dividiamo $[a, b]$ in n parti uguali e chiamiamo $x_0 = a$, $x_n = b$ e $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ gli estremi di questa suddivisione. Ovviamente ogni intervallino ha ampiezza $\Delta x = (b-a)/n$. Scegliamo adesso come ci piace un punto z_1 nell'intervallo $[x_0, x_1]$, un punto z_2 nell'intervallo $[x_1, x_2]$ e così via. Definiamo la somma di Riemann di f in $[a, b]$

$$\Delta x\ f(z_1) + \Delta x\ f(z_2) + \cdots + \Delta x\ f(z_n). \tag{8}$$

Definiamo adesso l'*integrale di f tra a e b*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\Delta x\ f(z_1) + \Delta x\ f(z_2) + \cdots + \Delta x\ f(z_n)\right). \tag{9}$$

Osserviamo che l'integrale è un numero, non una funzione.

Un commento sul perché di questo simbolo. Il simbolo di integrale ricorda una S, per ricordare che esso nasce da una operazione di somma, il simbolo $f(x)dx$ ricorda i singoli termini che compaiono in una somma di Riemann, che sono prodotti di Δx per valori della funzione $f(x)$.

Come si è visto prima nel calcolo dell'area di B, la scelta dei punti z_i può cambiare il valore della somma di Riemann corrispondente ad un fissato n, ma non cambia il valore del limite per $n \to \infty$ e quindi non cambia il valore dell'integrale.

Come può essere interpretata geometricamente la somma di Riemann (8)? Vedi Fig. 5. Il punto z_i determina l'altezza del rettangolo i-mo: il primo rettangolo approssimante ha altezza $|f(z_1)|$, il secondo $|f(z_2)|$ e così via. Allora $\Delta x\ f(z_1)$ è l'area del primo rettangolo se $f(z_1)$ è positiva, ed è l'area del primo rettangolo moltiplicata per -1 se $f(z_1) < 0$. Ad esempio nella situazione della figura la somma di Riemann somma le aree dei primi rettangoli ma sottrae le aree degli ultimi. Per questo si ha che *l'integrale può essere interpretato come una area con segno* che somma le aree fra l'asse x e la parte del grafico della funzione che sta sopra l'asse x, ma sottrae le aree comprese tra l'asse x e la parte del grafico sotto l'asse x.

Per far pratica con la definizione di integrale usiamola per calcolare

$$\int_0^3 2 - x\ dx.$$

L'interpretazione geometrica appena presentata ci dice che questo integrale è uguale

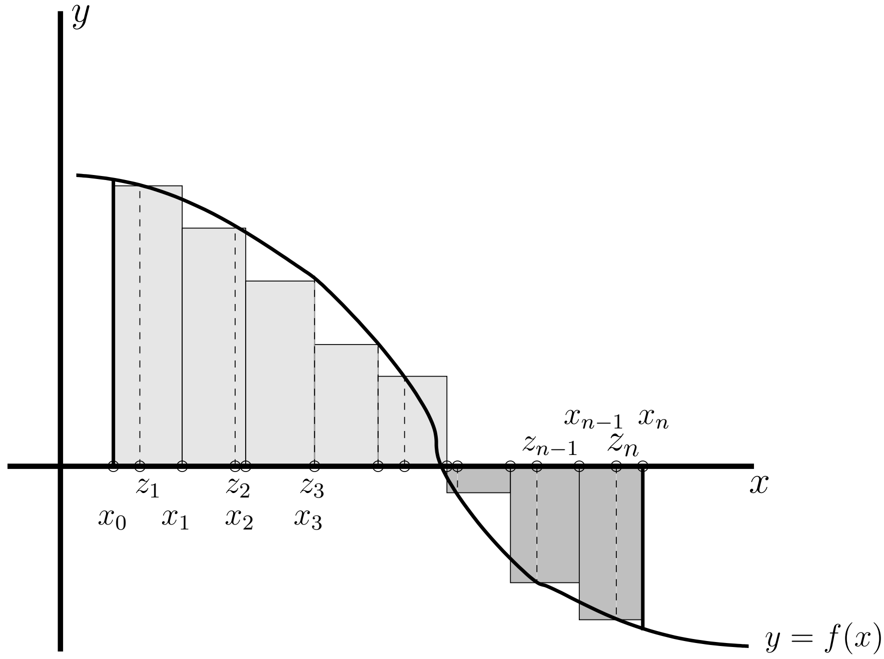

FIGURA 5. Interpretazione della somma di Riemann in termini di "aree con segno"

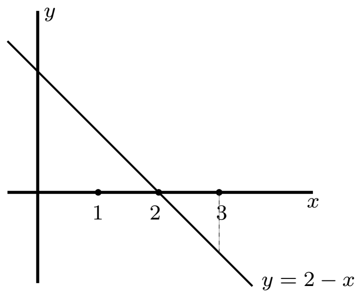

FIGURA 6. Grafico di $2 - x$.

all'area di un triangolo di base e altezza 2 meno l'area di un triangolo di base e altezza 1, cioè che

$$\int_0^3 2 - x \; dx = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Calcoliamo l'integrale usando la definizione. Ho che $\Delta x = 3/n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $\ldots$, $x_i = 3i/n$, e quindi la somma (8) diventa

$$\Delta x \; (2 - z_1) + \Delta x \; (2 - z_2) + \cdots + \Delta x \; (2 - z_n).$$

Mettendo in evidenza Δx e sommando tra di loro tutti i termini 2 (che sono n) ho

$$\Delta x \left(2n - (z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1})\right).$$

Adesso scegliamo z_i uguale all'estremo sinistro dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, cioè $z_i = 3i/n$. Scrivendo esplicitamente il valore di Δx, il valore di z_i e mettendo in evidenza il fattore $3/n$ ottengo

$$\frac{3}{n}\left(2n - \frac{3}{n}(1+2+\cdots+n)\right). \tag{10}$$

Mi serve adesso la seguente formula, analoga alla (6), e anche questa data senza dimostrazione: la somma dei primi n numeri interi positivi è

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sostituendo questa espressione in (10) ottengo la seguente formula per la somma di Riemann di $2-x$ in $[0,3]$:

$$\frac{3}{n}\left(2n - \frac{3n(n+1)}{2n}\right)$$

cioè

$$6 - \frac{9(n+1)}{2n}.$$

Il limite di tale espressione per $n \to +\infty$ è $6 - 9/2$ che coincide con $3/2$, come ci si aspettava.

2. Metodo delle primitive per calcolare un integrale

In queste pagine presento due metodi per calcolare l'integrale

$$\int_a^b f(x)\ dx. \tag{11}$$

Il primo utilizza una funzione primitiva di f. Questo metodo di calcolo ha il vantaggio di dare un risultato esatto e di essere molto semplice da applicare *una volta che si conosce la primitiva.* Il problema con questo metodo è che il trovare la primitiva di f può essere molto complicato.

Iniziamo con il definire cosa è una primitiva di f.

Definizione 2.1. Data una funzione f ed un intervallo I, una funzione F definita in I si chiama *primitiva* di f se la derivata di F è uguale ad f in ogni $x \in I$, cioé

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in I.$$

Il termine *antiderivata* è un termine equivalente a quello di primitiva.

Ad esempio x^2 è una primitiva di $2x$ in $\mathbb{R}$, $\sin x$ è una primitiva di $\cos x$ in $\mathbb{R}$, $\ln x$ è una primtiva di $1/x$ in $(0,\infty)$. Anche x^2+45 è una primitiva di $2x$ su $\mathbb{R}$, così come anche x^2-5 e, più in generale, x^2+C, qualsiasi sia la costante C. Ci son quindi infinite primitive di una funzione f, tutte quelle che si ottengono a partire da una particolare primitiva F sommandogli una costante qualsiasi. Una domanda naturale è se oltre a queste primitive ne esistono anche altre. Il prossimo teorema ci dice di no.

Teorema 2.2. *Se F è una primitiva di f sull'intervallo I, allora la più generale primitiva di f in I è*

$$F(x) + C$$

dove C è una costante arbitraria.

DIMOSTRAZIONE. Si devono provare due cose. La prima, la piu' semplice, è che $F(x)+C$ è ancora una primitiva di f. Questo fatto è una conseguenza della regola di derivazione della somma e del fatto che la derivata di una funzione costante è nulla, cioé del fatto che

$$(F(x)+C)' = F'(x)+C' = F'(x)+0 = f(x).$$

La seconda cosa che dobbiamo provare è che non ci sono primitive di f diverse da $F+C$. Per far ciò prendiamo una qualsiasi primitiva G e dimostriamo che anche essa è uguale a $F+C$, per una opportuna scelta di C. Per fare ciò mostriamo che la derivata di $G(x)-F(x)$ è uguale a zero in ogni $x \in I$. Infatti

$$(G(x)-F(x))' = G'(x)-F'(x) = f(x)-f(x) = 0 \quad \text{in ogni } x \in I.$$

Qui abbiamo sfruttato il fatto che $G' = F' = f$, perché sia G che F son primitive di f. Adesso alla funzione $G-F$ applico il terzo corollario del Teorema di Lagrange, quello che dice che se una funzione ha derivata nulla in tutti i punti di un intervallo allora tale funzione è costante. Posso concludere che

$$G(x)-F(x) = C \quad \text{per una opportuna costante } C \text{ ed ogni } x \in I.$$

Questa formula è equivalente a $G(x) = F(x)+C$. □

Passiamo adesso a descrivere il metodo di calcolo. Esso è il contenuto del prossimo teorema, chiamato *Teorema fondamentale del calcolo* perché lega insieme i due concetti oggetto della branca della matematica chiamata *Calcolo*, cioé la derivata (su cui si basa il concetto di primitiva) e l'integrale. (Ad essere precisi ci son due forme del Teorema fondamentale del calcolo, e il vostro libro chiama il prossimo teorema *Secondo* Teorema fondamentale del calcolo.)

TEOREMA 2.3 (Teorema fondamentale del calcolo). *Se f è continua nell'intervallo $[a,b]$, allora*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f in $[a,b]$.

DIMOSTRAZIONE. Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n parti uguali e chiamiamo Δx la lunghezza di ciascuno degli n intervalli che otteniamo. Per semplicità supponiamo adesso che n sia 4. Allora

$$F(b)-F(a) = (F(b)-F(x_3)) + (F(x_3)-F(x_2)) + \\ + (F(x_2)-F(x_1)) + (F(x_1)-F(a)) \,. \tag{12}$$

Il Teorema di Lagrange, applicato alla funzione F nell'intervallo $[x_3,b]$, dice che esiste un numero $c_4 \in (x_3,b)$ (perché lo chiamo c_4 invece di c sarà chiaro fra poco) tale che

$$\frac{F(b)-F(x_3)}{b-x_3} = F'(c_4).$$

Questa formula può essere riscritta come

$$F(b)-F(x_3) = F'(c_4)\Delta x.$$

Ma siccome F è una primitiva di f allora F' coincide con f e quindi la formula può essere riscritta anche come

$$F(b) - F(x_3) = f(c_4)\Delta x. \tag{13}$$

In modo analogo si dimostra che esistono $c_1 \in (a, x_1)$, $c_2 \in (x_1, x_2)$ e $c_3 \in (x_2, x_3)$ tali che

$$\begin{aligned} F(x_3) - F(x_2) &= f(c_3)\Delta x; \\ F(x_2) - F(x_1) &= f(c_2)\Delta x; \\ F(x_1) - F(a) &= f(c_1)\Delta x. \end{aligned} \tag{14}$$

Grazie a (13) e (14), la formula (12) adesso diventa

$$F(b) - F(a) = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + f(c_4)\Delta x.$$

Ciò che si è fatto con $n = 4$ può essere ripetuto con qualsiasi valore di n ottenendo

$$F(b) - F(a) = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x.$$

Di conseguenza si ha anche

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \Big(f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x \Big) = \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

DEFINIZIONE 2.4. Il simbolo $[F(x)]_a^b$ è un modo compatto di scrivere $F(b) - F(a)$. Cioé

$$\Big[F(x)\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

Utilizziamo il teorema per calcolare due integrali già calcolati precedentemente tramite la definizione. Poiché $x^3/3$ è una primitiva di x^2 allora

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Inoltre poiché $2x - x^2/2$ è una primitiva di $2 - x$ allora

$$\int_0^3 2 - x\ dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \Big(2 \times 3 - \frac{3^2}{2}\Big) - \Big(2 \times 0 - \frac{0^2}{2}\Big) = \frac{3}{2}.$$

3. Metodi per calcolare una approssimazione di un integrale

Come ho già accennato nella sezione precedente il problema con il calcolare un integrale usando una primitiva può stare nel fatto che il trovare la primitiva di f può essere molto complicato. Addirittura per molte funzioni la primitiva, pur esistendo, non può esser scritta in nessun modo usando combinazioni di funzioni elementari. Per queste funzioni la primitiva è una funzione nuova, non calcolabile tramite combinazioni di tasti presenti sulle calcolatrici scientifiche. In queste situazioni il metodo delle primitive non è utile al calcolo di (11).

I metodi per calcolare una approssimazione di un integrale al contrario sono molto semplici e possono essere usati con ogni funzione. Possono richiedere molti calcoli, a seconda della bontà dell'approssimazione che si vuole ottenere. Non danno il valore esatto ma solo una sua approssimazione. Essi si basano tutti sostanzialmente sull'uso di somme di Riemann. Tutte le somme di Riemann sono approssimazioni dell'integrale e l'approssimazione migliora al crescere di n.

Adesso ci poniamo nella seguente situazione. Abbiamo a disposizione una certa potenza di calcolo e scegliamo il parametro n il più alto possibile compatibilmente con la potenza di calcolo che abbiamo (ad esempio basso se abbiamo solo un foglio di carta ed una calcolatrice tascabile, medio se abbiamo un computer ed un foglio di calcolo (tipo Excel o Calc della suite Open/LibreOffice), alto se abbiamo un computer e un software fatto apposta). Fissato questo valore n si cerca la formula che contiene n (o $n+1$) termini (e quindi richiede di calcolare circa n volte il valore di f) e che meglio approssima l'integrale.

Fissiamo alcune notazioni:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$
$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = b.$$

Inoltre indichiamo con $\overline{x}_i$ il punto medio dell'intervallo i-mo, cioè

$$\overline{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Nel seguito metteremo sempre alla prova i metodi presentati nel calcolo di $\int_1^2 1/x \, dx$. Il metodo delle primitive ci da il valore esatto di tale integrale:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \ln 2 \approx 0.6931471806. \tag{15}$$

3.1. Metodo dei punti medi. E' il metodo che si ottiene utilizzando come approssimazione la somma di Riemann (8) con i punti z_i uguali ai punti medi degli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$.

Cioè

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx M_n := \Delta x \Big(f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) + \cdots + f(\overline{x}_n) \Big). \tag{16}$$

Usiamo questa regola per calcolare (15) con $n = 5$. Abbiamo

$$\Delta x = 0.2,$$
$$x_0 = 1, x_1 = 1.2, x_2 = 1.4, x_3 = 1.6, x_4 = 1.8, x_5 = 2,$$
$$\overline{x}_1 = 1.1, \overline{x}_2 = 1.3, \overline{x}_3 = 1.5, \overline{x}_4 = 1.7, \overline{x}_5 = 1.9.$$

Otteniamo

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx \approx 0.2 \Big(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9} \Big) = 0.691908.$$

La differenza tra il risultato esatto e quello ottenuto da questa regola con $n = 5$ è 0.001239, dell'ordine di 1/1000.

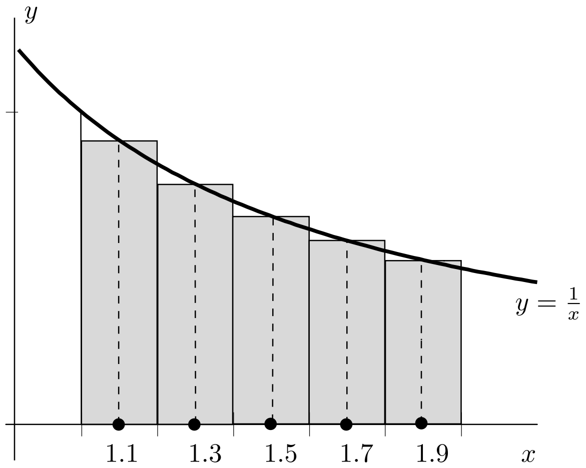

FIGURA 7. I rettangoli associati alla regola del punto medio: le parti che escono fuori dall'insieme si compensano con le parti dell'insieme lasciate vuote.

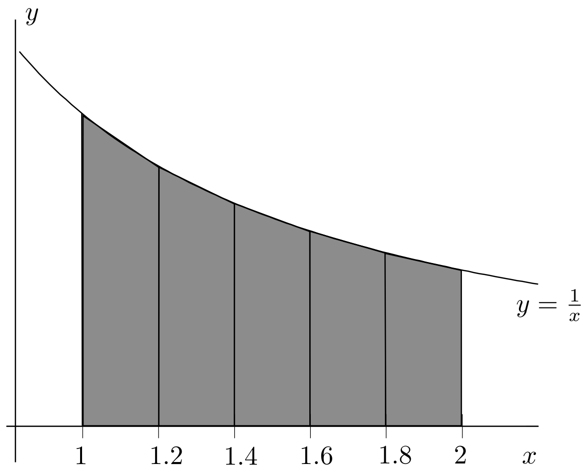

FIGURA 8. I trapezi associati alla regola del trapezio.

3.2. Metodo del trapezio. Questo metodo prende il nome dal fatto che per approssimare l'area corrispondente ad un integrale invece di usare n rettangoli si usano n trapezi. Ad esempio se lo applichiamo al calcolo di (15) (con $n = 5$) l'area viene approssimata tramite i trapezi in Figura 8. Il primo trapezio ha base maggiore uguale al valore della funzione in $x = 1$, base minore uguale al valore della funzione in $x = 1.2$ e altezza uguale a $\Delta x = 0.2$. La sua area è quindi $1/2 \times (1/1 + 1/1.2) \times 0.2$. Ragionando analogamente si vede che la somma delle aree dei 5 trapezi è uguale a

$$\frac{0.2}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}\right)+\frac{0.2}{2}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.4}\right)+\frac{0.2}{2}\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{1.6}\right)+ \\ +\frac{0.2}{2}\left(\frac{1}{1.6}+\frac{1}{1.8}\right)+\frac{0.2}{2}\left(\frac{1}{1.8}+\frac{1}{2}\right).$$

Si osservi che il termine $1/1.2$ compare 2 volte, uno nell'area del primo trapezio ed uno nell'area del secondo. Lo stesso succede anche per $1/1.4$, $1/1.6$ e $1/1.8$. Tenendo conto di questo la somma delle 5 aree può essere riscritta anche come

$$\frac{0.2}{2}\Big(\frac{1}{1}+2\frac{1}{1.2}+2\frac{1}{1.4}+2\frac{1}{1.6}+2\frac{1}{1.8}+\frac{1}{2}\Big)=0.695635.$$

In questo caso la differenza tra l'approssimazione e l'integrale esatto è -0.002488, anche in questo caso dell'ordine di $1/1000$.

Nel caso generale questo metodo approssima l'integrale tramite la regola

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n := \frac{\Delta x}{2}\Big(f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\Big). \tag{17}$$

Osserviamo i coefficienti $1, 2, 2, \ldots, 2, 1$ nella somma.

Chiamiamo S_n l'approssimazione ottenuta scegliendo nella somma di Riemann (8) z_i uguale all'estremo sinistro dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, e chiamiamo D_n quella ottenuta scegliendo z_i uguale all'estremo destro di $[x_{i-1}, x_i]$, cioè

$$\begin{aligned} S_n &= \Delta x\ f(x_0) + \Delta x\ f(x_1) + \cdots + \Delta x\ f(x_{n-1}),\\ D_n &= \Delta x\ f(x_1) + \Delta x\ f(x_2) + \cdots + \Delta x\ f(x_n). \end{aligned}$$

Allora è facile mostrare che T_n è la media tra D_n e S_n

$$T_n = \frac{D_n + S_n}{2}.$$

3.3. Metodo di Simpson.

Questo metodo può essere applicato solo quando n è pari. La formula è la seguente

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx \approx Sim_n := \frac{\Delta x}{3}\Big(&f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\\ &+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big). \end{aligned} \tag{18}$$

Notate i coefficienti $1, 4, 2, 4, 2, \ldots, 2, 4, 1$ che appaiono nella somma in (18).

Se applichiamo questo metodo, con $n = 6$, al calcolo di (15) otteniamo

$$\Delta x = 1/6, x_0 = 1, x_1 = \frac{7}{6}, x_2 = \frac{8}{6}, x_3 = \frac{9}{6}, x_4 = \frac{10}{6}, x_5 = \frac{11}{6}, x_6 = 2,$$

e, visto che $f(x_1) = 1/(7/6) = 6/7$, $f(x_2) = 1/(8/6) = 6/8$ e così via

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{1}{18}\Big(1+4\frac{6}{7}+2\frac{6}{8}+4\frac{6}{9}+2\frac{6}{10}+4\frac{6}{11}+\frac{1}{2}\Big)\approx 0.6931697932.$$

La differenza tra il valore esatto dell'integrale e quello approssimato è -2.26×10^{-5}, dell'ordine di $1/100000$.

3.4. Stime dell'errore di approssimazione commesso. Riepiloghiamo in una tabella i valori che si ottengono applicando le formule precedenti per approssimare (15) per alcuni valori di n. Ricordo che il valore esatto è $\ln 2 \approx 0,6931471806$.

n	M_n	T_n	Sim_n
5	0.691908	0.695635	
6			0.6931697932
10	0.692835	0.693771	0.6931502307
20	0.693069	0.693303	0,6931473746

Riportiamo anche in una tabella gli errori commessi con i metodi precedenti. Indichiamo con Errore_M la differenza tra il valore esatto dell'integrale e il valore approssimato ottenuto con il metodo dei punti medi. Definiamo in modo analogo Errore_T e Errore_{Sim}.

n	Errore_M	Errore_T	Errore_{Sim}
5	0.001239	-0.002488	
6			-2.26×10^-5
10	0.000312	-0.000624	-3.05×10^-6
20	0.000078	-0.000156	-1.94×10^-7

Alcune osservazioni:

(1) I metodi dei punti medi e del trapezio hanno lo stesso ordine di precisione, ma l'errore nel metodo dei punti medi è circa la metà di quello con il trapezio. Il metodo di Simpson è molto più preciso.
(2) Raddoppiando n gli errori Errore_M e Errore_T si dividono circa per 4, mentre Errore_{Sim} si divide circa per un fattore 16.

I prossimi due teoremi danno delle stime teoriche che sono coerenti con le osservazioni fatte per questo esempio.

Teorema 3.1 (Stima dell'errore nei metodi dei punti medi e del trapezio). *Supponiamo che f abbia derivate prime e seconde in ogni $x \in [a,b]$. Sia K una costante scelta in modo che risulti $|f''(x)| \le K$ qualunque sia $x \in [a,b]$. Allora*

$$|Errore_M| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2}, \quad |Errore_T| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2}. \tag{19}$$

Teorema 3.2 (Stima dell'errore nel metodo di Simpson). *Supponiamo che f abbia derivate prime, seconde, terze e quarte in ogni $x \in [a,b]$. Sia K una costante scelta in modo che risulti $|f^{(4)}(x)| \le K$ qualunque sia $x \in [a,b]$. Allora*

$$|Errore_{Sim}| \le \frac{K(b-a)^5}{180n^4}. \tag{20}$$

Il simbolo $f^{(4)}$ indica la derivata quarta di f.

Vorrei soffermarmi su cosa sia e come si determini la costante K che appare nei due teoremi, perché nella mia esperienza questo è un aspetto difficile da comprendere per gli studenti. Per fissare le idee parliamo del Teorema 3.1, discorsi analoghi valgono anche per il Teorema 3.2. In quel caso K è un qualsiasi numero che sia maggior o uguale del valore massimo del valore assoluto di f'' in $[a, b]$, cioè

$$K \geq \max_{[a,b]} |f''|.$$

Per determinare K in un caso concreto si possono ad esempio applicare le tecniche di ricerca del valore massimo di una funzione su un intervallo alla funzione $|f''|$ in $[a, b]$ e scegliere K uguale a tale valore massimo. Supponiamo ad esempio che si voglia applicare il Teorema 3.1 a $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$. In questo caso la derivata seconda di $1/x$ è $2/x^3$, il suo valore assoluto in $[1, 2]$ è ancora $2/x^3$ e

$$\max_{[1,2]} |f''| = \max_{[1,2]} \frac{2}{x^3} = 2,$$

perché $2/x^3$ è una funzione decrescente (la *sua* derivata prima è $-6/x^4$ che è sempre negativa in $[1, 2]$) e il suo valore massimo è assunto quando $x = 1$. Allora posso scegliere $K = 2$ in (19). Se invece avessi voluto stimare $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ tramite il Teorema 3.2 avrei potuto calcolare

$$\max_{[1,2]} |f^{(4)}|.$$

Poiché il valore assoluto della derivata quarta di $1/x$ in $[1, 2]$ è $24/x^5$ e anche questa funzione è decrescente in $[1, 2]$, si ha che

$$\max_{[1,2]} |f^{(4)}| = 24.$$

La stima (20) vale allora in questo caso con $K = 24$.

Proviamo ad applicare questi due teoremi all'integrale (15). Come appena osservato con questo integrale posso prendere $K = 2$ in (19) e posso prendere $K = 24$ in (20). Allora i due teoremi precedenti danno le seguenti stime per gli errori commessi nel calcolare (15) con i vari metodi

$$|\text{Errore}_M| \leq \frac{2(2-1)^3}{24n^2}, \quad |\text{Errore}_T| \leq \frac{2(2-1)^3}{12n^2}, \quad |\text{Errore}_{Sim}| \leq \frac{24(2-1)^5}{180n^4}.$$

Queste stime dipendono da n e se ad esempio vogliamo delle stime per $n = 10$ otteniamo

$$|\text{Errore}_M| \leq \frac{1}{1200} \approx 0.0008, \quad |\text{Errore}_T| \leq \frac{1}{600} \approx 0.0016,$$
$$|\text{Errore}_{Sim}| \leq \frac{24}{18 \times 10^5} \approx 0.000013.$$

Confrontando questi numeri con quelli corrispondenti ad $n = 10$ nella tabella degli errori riportata sopra si può vedere che nel caso di (15) le stime date dai teoremi sono più pessimiste della realtà.

Queste stime possono essere usate anche per capire come scegliere n in modo da raggiungere una certa accuratezza. Ad esempio se vogliamo calcolare $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ con una accuratezza superiore a 10^{-6} (un milionesimo) tramite il metodo del Trapezio quale n dobbiamo scegliere? Basta scegliere n in modo che

$$\frac{2(2-1)^3}{12n^2} \leq 10^{-6}$$

cioè $n \geq 409$. Se usiamo invece il metodo di Simpson basta richiedere

$$\frac{24(2-1)^5}{180n^4} \leq 10^{-6},$$

cioè $n \geq 20$. Un altro esempio: per calcolare $\int_0^2 e^{x^2} dx$ tramite il metodo dei punti medi con una accuratezza superiore a $0,0001$ che n dobbiamo scegliere? Per rispondere iniziamo calcolando il valore di K. In questo caso $f^{''} = (4x^2+2)e^{x^2}$, e il suo valore assoluto coincide con $f^{''}$. Poiché $0 \leq x \leq 2$ allora $4x^2+2 \leq 4 \times 2^2 + 2 = 18$ e $e^{x^2} \leq e^{2^2}$. Quindi $|f^{''}(x)| \leq 18e^4$ e posso scegliere $K = 18e^4$. Per avere una accuratezza superiore a $0,0001$ devo scegliere n in modo che

$$\frac{18e^4(2-0)^3}{24n^2} \leq 10^{-4}$$

cioè $n \geq 181$.

4. Alcune applicazioni dell'integrazione

4.1. Aree. Un insieme A si dice *normale rispetto all'asse* y se può essere scritto come

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], g(x) \leq y \leq f(x)\},$$

per una opportuna scelta delle costanti a, b e delle funzioni continue f e g.

In questo caso l'area di A può essere calcolata tramite la formula seguente

$$\text{area}(A) = \int_a^b \big(f(t) - g(t)\big)\ dt.$$

Notate che $f(t) - g(t)$ è la lunghezza della sezione verticale di A che si trova sulla retta $x = t$. Quindi la formula precedente può essere letta come

$$\text{area}(A) = \int_a^b \text{lunghezza(sezione di } A \text{ con la retta } x = t)\ dt.$$

4.2. Volumi. Supponiamo adesso che B sia un insieme tridimensionale che abbia un asse di simmetria di rotazione. Fissiamo il sistema di riferimento in modo che tale asse sia l'asse x e sia f la funzione che ne descrive il profilo, cioè suponiamo che B possa essere scritto come

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x)\},$$

per una opportuna scelta di a e b. Questo modo di scrivere l'insieme appare se ad esempio la sezione di B con il piano xy (cioé il piano contenente gli assi x e y) è delimitato dai grafici di $y = f(x)$ e di $y = -f(x)$. Analogamente compare se, per ogni $t \in [a,b]$, la sezione di B con il piano $x = t$ (cioé il piano ortogonale all'asse x e passante per il punto $(t,0,0)$) è un cerchio di raggio $f(t)$.

Supponiamo che f sia una funzione continua. In questo caso il volume di B può essere calcolato tramite la formula

$$\text{volume}(B) = \int_a^b \pi f(t)^2\ dt.$$

Notate che ciò che compare dentro l'integrale è l'area di un cerchio di raggio $f(t)$, cioè l'area della sezione di B con il piano $x = t$. In realtà la formula precedente è un caso particolare di una formula più generale. Se C è un insieme in $\mathbb{R}^3$ "di forma non troppo selvaggia", vale la formula

$$\text{volume}(C) = \int_a^b \text{area(sezione di } C \text{ con il piano } x = t)\ dt.$$

4.3. Lunghezze di curve. Sia D un arco del grafico di una funzione f, ad esempio la parte del grafico formata dai punti la cui coordinata x è compresa tra a e b, cioè (vedi Fig. 9)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y = f(x)\}.$$

Come si può calcolare la lunghezza di D?

Supponiamo che f sia una funzione continua e che anche la sua derivata f' sia una funzione continua. Allora la lunghezza di D può essere calcolata tramite la formula

$$\text{lunghezza}(D) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx.$$

Dimostrazione. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali e diamo ai simboli Δx, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ il solito significato. Sia $P_0 = (a, f(a))$, $P_1 = (x_1, f(x_1))$, $P_2 = (x_2, f(x_2))$ e così via fino a $P_n = (b, f(b))$. Consideriamo la curva D_{approx} formata dall'unione del segmento P_0P_1, del segmento P_1P_2 etc etc, cioè

$$D_{approx} = P_0P_1 \cup P_1P_2 \cup P_2P_3 \cup \cdots \cup P_{n-1}P_n.$$

La lunghezza di D_{approx} approssima quella di D.

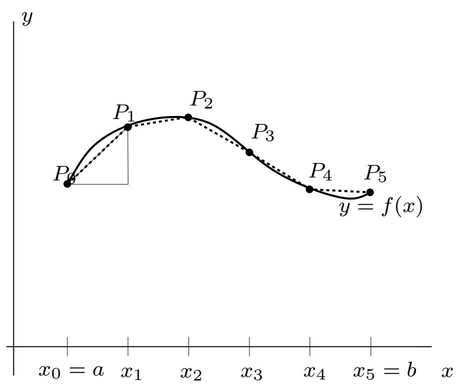

Figura 9. Le curve D (linea continua) e D_{approx} (linea tratteggiata) nel caso $n = 5$.

Calcoliamo la lunghezza di P_0P_1. Per il teorema di Pitagora

$$\text{lunghezza}(P_0P_1) = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (f(x_1) - f(a))^2}. \tag{21}$$

Per il Teorema del valor medio di Lagrange, applicato ad f e all'intervallo $[a, x_1]$, esiste un punto $c_1 \in (a, x_1)$ tale che

$$f(x_1) - f(a) = f'(c_1)\ (x_1 - a).$$

Sostituiamo questa espressione di $f(x_1) - f(a)$ in (21) e otteniamo

$$\text{lunghezza}(P_0P_1) = \sqrt{(x_1 - a)^2 + f'(c_1)^2\ (x_1 - a)^2}. \tag{22}$$

Se mettiamo in evidenza $(x_1 - a) = \Delta x$ in (22) otteniamo

$$\text{lunghezza}(P_0P_1) = (x_1 - a)\sqrt{1 + f'(c_1)^2} = \Delta x\sqrt{1 + f'(c_1)^2}.$$

Con un ragionamento analogo si dimostra che esiste $c_2 \in (x_1, x_2)$ tale che lunghezza$(P_1P_2) = \Delta x\sqrt{1 + f'(c_2)^2}$ e, più in generale, che per ogni i esiste $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tale che

$$\text{lunghezza}(P_{i-1}P_i) = \Delta x\sqrt{1 + f'(c_i)^2}.$$

Sommando tutte queste lunghezze si ottiene

$$\begin{aligned}\text{lunghezza}(D) &\approx \text{lunghezza}(D_{approx})\\ &= \text{lunghezza}(P_0P_1) + \text{lunghezza}(P_1P_2) + \cdots + \text{lunghezza}(P_{n-1}P_n)\\ &= \Delta x\sqrt{1 + f'(c_1)^2} + \Delta x\sqrt{1 + f'(c_2)^2} + \cdots + \Delta x\sqrt{1 + f'(c_n)^2}.\end{aligned}$$

Chiamiamo adesso

$$g(x) := \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Usando g possiamo scrivere l'espressione sopra come

$$\text{lunghezza}(D) \approx \Delta x\ g(c_1) + \Delta x\ g(c_2) + \cdots + \Delta x\ g(c_n).$$

Questa è una somma di Riemann della funzione g in $[a, b]$. Facendo tendere n all'infinito l'approssimazione di D_{approx} per D diventa sempre più precisa e la somma di Riemann tende a $\int_a^b g(x)\ dx$. Quindi

$$\text{lunghezza}(D) = \int_a^b g(x)\ dx.$$

Infine ricordando la definizione di g si ha

$$\text{lunghezza}(D) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx.$$

La dimostrazione è conclusa. □

4.4. Esempi di applicazioni dell'integrale ad altre scienze. Rivediamo adesso gli esempi delle sottosezioni 1.2 e 1.3. Se $v(t)$ e $p(t)$ indicano rispettivamente la velocità e la portata come definite in quelle sottosezioni allora

$$\begin{aligned}&(\text{Posizione quando } t = 5) - (\text{Posizione quando } t = 0) =\\ &\qquad = (\text{Spostamento tra } t = 0 \text{ e } t = 5) = \int_0^5 v(t)\ dt.\end{aligned} \tag{23}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}(24)\quad &(\text{Volume di liquido nel recipiente quando } t = 5) - \\ &- (\text{Volume di liquido nel recipiente quando } t = 0) = \int_0^5 p(t)\ dt.\end{aligned}$$

Questi due esempi non sono casi particolari ma esempi di una situazione più generale. Per spiegare questo iniziamo ad osservare che ciò che sta dentro l'integrale è la velocità con cui ciò che sta fuori varia al passare del tempo, cioè

$$\begin{aligned} v(t) &= \text{velocità con cui varia la posizione rispetto al tempo} \\ &= \text{derivata della funzione posizione rispetto al tempo} \end{aligned} \tag{25}$$

e

(26)

$$\begin{aligned} p(t) &= \text{velocità con cui varia il volume di liquido nel recipiente rispetto al tempo} \\ &= \text{derivata della funzione volume di liquido nel recipiente rispetto al tempo.} \end{aligned}$$

Tutte le volte che abbiamo una grandezza, chiamiamola $A(t)$, che varia con il tempo ho che

$$A(t_2) - A(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (\text{velocità con cui } A \text{ varia rispetto al tempo})\ dt. \tag{27}$$

La formula (27) è una conseguenza del teorema fondamentale del calcolo in una delle sue due versioni. Tale teorema infatti può essere riscritto come segue.

Teorema 4.1. *Se $F(t)$ è una funzione la cui derivata è continua allora*

$$F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F'(t)\ dt. \tag{28}$$

Infatti $F(t)$ è una primitiva della sua derivata $F'(t)$ (è un fatto ovvio). Allora visto che la velocità con cui A varia rispetto al tempo non è altro che la derivata di A rispetto al tempo la formula (27) segue da (28).